Bestaat toeval?

De Bell-ongelijkheden en het Bohr-Einstein debat

Mirte Dekkers
Klaas Landsman

Institute for Mathematics, Astrophysics, and Particle Physics (IMAPP)
en
Genootschap voor Meetkunde en Kwantumtheorie (GQT-cluster)

Radboud Universiteit Nijmegen
Toernooiveld 1, 6525 ED Nijmegen

CONCEPT: 19 DECEMBER 2006
mdekkers@math.ru.nl
landsman@math.ru.nl

Inhoudsopgave

1 Toeval **5**

2 Het debat tussen Einstein en Bohr **7**

3 Het argument voor zuiver toeval **11**

4 De Bell-ongelijkheid voor drie vragen **15**

5 Uitkomsten en gebeurtenissen **19**

6 Kansverdelingen en kansfuncties **23**

7 Afleiding van de Bell-ongelijkheid **27**

8 De wiskunde van de kwantummechanica **31**

9 Fotonen en polarisatie **37**

10 EPR-correlaties **43**

11 Een eenvoudige verklaring? **47**

12 Het tensorproduct **49**

13 Berekening van de EPR-correlaties **51**

14 Het bestaan van zuiver toeval **55**

15 Keuzeonderwerp 1:
Het *Dutch Book Theorem* **59**

16 Keuzeonderwerp 2:
Algemene afleiding van de Bell-ongelijkheden **67**

1
Toeval

Dit boekje gaat over de vraag of toeval 'echt' bestaat. Het zal je waarschijnlijk niet meteen duidelijk zijn wat deze vraag precies betekent. We zullen daarom eerst de interpretatie van het woord 'toeval' nader onderzoeken. Daarna gaan we aan de hand van enkele voorbeelden proberen helder te formuleren wat wij onder 'echt' toeval verstaan.

We moeten eerst vaststellen wat we onder het begrip verstaan. Dit is een moeilijke vraag!

Opgave 1.1

Wat versta jij onder toeval?

a) Probeer zo helder mogelijk te formuleren wat jij onder het begrip 'toeval' verstaat.

b) Vergelijk je antwoord met je buurman of buurvrouw en bespreek met elkaar de eventuele verschillen.

Waarschijnlijk heb je bij het maken van deze opgave gemerkt dat er verschillende interpretaties van het woord toeval bestaan. *'Toeval is een gebeurtenis die plaatsvindt met een hele kleine kans'* en *'Toeval is een gebeurtenis die niet te voorspellen is'* zijn beide aannemelijke uitspraken over toeval, maar komen niet op hetzelfde neer. De betekenis van het begrip toeval is vaak afhankelijk van de persoon die het gebruikt en van de context waarin het gebruikt wordt. Om de vraag 'Bestaat toeval?' te kunnen stellen - laat staan te beantwoorden - moeten we dus eerst het begrip 'toeval' precies te maken.

De verschillende interpretaties van het woord toeval maken het ook moeilijk om een wiskundige redenering over dit onderwerp op te zetten. Omdat we dit wel van plan zijn gaan we, tegen beter weten in, toch een poging doen een definitie van het begrip toeval te geven. Met behulp van de Van Dale vinden we het volgende:

toe·val[1] *(het ∼), gebeurtenis of omstandigheid die vooraf niet te voorzien, niet te berekenen is geweest.*
toe·val[2] *(het, de ∼ (m.)), aanval van epilepsie.*

De tweede betekenis is voor ons niet van belang en wordt ook zelden nog gebruikt. De eerste lijkt aardig in de richting te komen van waar we naar op zoek zijn. Met deze betekenis van toeval in ons achterhoofd gaan we verder en bekijken we enkele voorbeelden van toevalsprocessen.

Gooien met een dobbelsteen
Als íets in het dagelijks leven als toeval beschouwd wordt, dan is het wel het gooien met een (eerlijke) dobbelsteen. Voordat we gaan gooien weten we nog niet wat de uitkomst zal zijn: de kans op iedere uitkomst is 1/6. Het lijkt dus om een gebeurtenis te gaan waarvan de uitkomst *niet te berekenen is geweest* en volgens de definitie van de Van Dale gaat het in dat geval om toeval. We kunnen ons echter afvragen of het wel

juist is om te stellen dat de uitkomst van een worp met een dobbelsteen niet te berekenen is. Als we op de hoogte zouden zijn geweest van alle krachten die op de dobbelsteen werken (zoals de zwaartekracht en de wrijvingskracht met de lucht), dan zouden we met behulp van de wetten van de mechanica wel degelijk in staat zijn geweest de uitkomst met zekerheid te voorspellen. Met andere woorden, het ogenschijnlijke toeval van de dobbelsteenworp wordt veroorzaakt door het feit dat wij niet over voldoende informatie beschikken om de uitkomst te berekenen. Informatie bijvoorbeeld over de moleculen in de lucht, de details van de handbeweging en de strucuur van het tafeloppervlak, die in principe (met behulp van geavanceerde meetapparatuur) wel te achterhalen zou zijn.[1]

Een enquête
Een marktonderzoekster wil weten of een aantal ondervraagden een dvd-speler in huis heeft. Bij een gegeven proefpersoon kan zij geen enkele voorspelling doen over het antwoord op deze vraag. Voor haar is het antwoord op de vraag puur toeval. Echter, de reden dat zij geen voorspelling kan doen over het antwoord van de proefpersoon is dat zij niet over voldoende informatie beschikt. Wederom is deze informatie in principe wel beschikbaar. Immers, de proefpersoon heeft een dvd-speler in huis of niet. De onderzoekster weet dit alleen niet.

De weerkaatsing van licht
Je hebt vast wel eens de volgende situatie meegemaakt: je staat in een verlichte kamer en buiten is het donker. De gordijnen zijn open. Als je voor het raam gaat staan, zie je je spiegelbeeld in de ruit. Op hetzelfde moment kan iemand die buiten staat jou ook zien. Blijkbaar wordt een gedeelte van het licht in de kamer door het raam teruggekaatst (dat gedeelte geeft je spiegelbeeld) en een ander gedeelte doorgelaten (waardoor de voorbijganger je kan zien).
Misschien zou je op het eerste gezicht niet verwachten dat aan deze ervaring een toevalsproces ten grondslag ligt. De moderne natuurkunde leert echter dat licht uit kleine, ondeelbare deeltjes bestaat, genaamd ***fotonen***. Met geavanceerde apparatuur is het in principe mogelijk één enkel foton naar het raam te schieten, en dan blijkt dat het soms wordt doorgelaten en soms wordt weerkaatst: de uitkomst is vooraf niet te voorspellen.

We hebben nu drie voorbeelden van toevalsproccessen gezien. De overeenkomst tussen de eerste twee voorbeelden is duidelijk: de *oorzaak* van het toeval is in beide gevallen een bepaald gebrek aan informatie. Een belangrijke opmerking hierbij is dat deze informatie in in principe wel beschikbaar is. Hoe zit het met het derde voorbeeld?

Opgave 1.2

> We hebben in de voorbeelden van de dobbelsteen en de enquête aangegeven welke informatie ontbreekt om een exacte voorspelling van de uitkomst te kunnen doen. Probeer uit te vinden (bijvoorbeeld met hulp van je natuurkundedocent of het internet) of er ook in het derde voorbeeld bepaalde informatie te achterhalen is waarmee je het wel of niet doorgelaten worden van een foton exact zou kunnen voorspellen.

Wordt elk toevalsproces veroorzaakt door een gebrek aan informatie die in principe wel voorhanden is?
In het vervolg zullen we gebruik maken van de formele term *zuiver toeval*.[2]

Definitie 1.1 *We noemen toeval **zuiver** als het **niet** wordt veroorzaakt door een gebrek aan informatie die in principe wel voorhanden is. Met andere woorden, zuiver toeval wordt per definitie **niet** veroorzaakt door onwetendheid (inclusief nog niet ontdekte natuurwetten, gebrek aan kennis over wel bekende natuurwetten en begincondities, ontoereikende rekenkracht, luiheid, enzovoort).*

Met deze definitie kunnen we de bovenstaande vraag herformuleren tot de vraag '*Bestaat zuiver toeval?*'. Deze vraag was tussen 1927 en 1949 het onderwerp van een verhit debat tussen Albert Einstein (1879–1955) en Niels Bohr (1885–1962), de twee grootste natuurkundigen van de twintigste eeuw. Meer hierover lees je in het volgende hoofdstuk.

1. We laten de vrije wil van de dobbelaar hier buiten beschouwing. Volgens de meeste onderzoekers wordt ook die door de natuurwetten bepaald, maar ook als je het daar niet mee eens bent kun je het voorbeeld zo opvatten dat de worp begint op het moment dat de dobbelsteen de hand verlaat.
2. Let op! In het schoolboek *Moderne Wiskunde* worden zogenaamde *weetkansen* (die je zelf kunt bepalen door slim te tellen, zoals bij dobbelen) en *zweetkansen* (die je slechts kunt schatten, zoals de kans op regen) ingevoerd. Hier is echter geen fundamenteel wiskundig verschil tussen en we zullen dan ook geen gebruik maken van deze begrippen. Sterker nog, wij begrijpen het verschil niet eens!

2

Het debat tussen Einstein en Bohr

In het begin van de twintigste eeuw was de vraag of zuiver toeval bestaat een belangrijk onderwerp van debat in de wetenschap. Men ontwikkelde nieuwe theorieën om verschijnselen als radioactiviteit te kunnen verklaren. Voor het eerst kreeg het begrip kans een belangrijke plaats in de natuurkunde en uiteindelijk mondde dit uit in het ontstaan van de kwantummechanica. In dit hoofdstuk bespreken we de belangrijkste gebeurtenissen en personen die een bijdrage hebben geleverd aan deze ontwikkeling.

Je hebt in het vorige hoofdstuk een paar voorbeelden gezien van schijnbaar toevallige gebeurtenissen die toch van tevoren al vastlagen, zoals het resultaat van een worp met een dobbelsteen of van een enquête.
Is alles wat gebeurt in principe al bepaald? De beroemde islamitische geleerde Omar Khayyam (1048–1131) drukte deze mogelijkheid als volgt uit:

> "De eerste dag van de schepping schreef
> Wat de Dag des Oordeels zal lezen."

Het idee dat iedere gebeurtenis in principe al bepaald is door het verleden heet ***determinisme***. Een minder vaak gebruikt maar even goed woord voor determinisme is ***bepaaldheid***. Tot de wetenschappelijke revolutie in de zeventiende eeuw was het argument voor determinisme dat God alles wist: toeval zou een belediging zijn voor zijn alwetendheid en volmaaktheid.
Met de klassieke natuurkunde van Isaac Newton (1642–1727), die bijvoorbeeld de planeetbanen beschrijft, verschoof het accent van God naar de natuurwetten. Pierre-Simon Laplace (1749-1827), een zeer zelfverzekerd persoon die zich als de opvolger van Newton beschouwde, zei op zekere dag tegen zijn baas Napoleon zelfs dat hij God niet meer nodig had.[1] Laplace formuleerde het deterministische karakter van de wetten van Newton (en daarmee de bepaaldheid van de natuur) op de volgende manier:

> "Voor een intelligent wezen dat op een bepaald moment zowel alle krachten in de natuur kent als de toestand van alle deeltjes zou niets onzeker zijn, en zouden zowel de toekomst als het verleden bekend zijn."

Met de wetten van Newton leek het in principe dus mogelijk de toekomst te voorspellen. Preciezer gezegd, wat de de gang van zaken in de natuur betreft geldt:

> *zekerheid is de combinatie van determinisme en alwetendheid.*

Want al zijn Newtons wetten van de mechanica in principe nog zo deterministisch, je moet naast deze wetten en de krachten die daarin voorkomen ook de begincondities van een systeem kennen en perfect kunnen rekenen om exact te kunnen voorspellen hoe dit systeem zich in de toekomst zal gedragen (denk bijvoorbeeld aan het voorbeeld van de dobbelsteen).[2]

---

1. Newton zelf daarentegen was zeer religieus en plaatste God boven zijn wetten.
2. Bij deeltjes worden de begincondities gegeven door de plaatsen en snelheden op een bepaalde tijd. Dit is wat Laplace met de 'toestand' bedoelt.

De mens wikt, God beschikt[3]
Tot de twintigste eeuw dachten de meeste mensen dat alles door God of de natuurwetten (of allebei) bepaald was. Waar komt toeval vandaan in een dergelijke deterministische wereld? Als zekerheid de combinatie is van determinisme en **al**wetendheid en determinisme niet ter discussie staat, moet wel gelden:

> **on***zekerheid is de combinatie van determinisme en* **on***wetendheid.*

Toeval is in een deterministisch wereldbeeld dus altijd een gevolg van een gebrek aan informatie of kennis. Voor gelovigen is alles door God bepaald, alleen weten wij mensen het niet. Voor natuurkundigen geldt dat gebeurtenissen voor ons ogenschijnlijk toevallig zijn als wij de begincondities niet precies kennen en ook niet goed genoeg kunnen rekenen en voorspellen. Volgens de klassieke natuurkunde is het bestaan van toeval dus eigenlijk een puur menselijke illusie!

De kansrekening werd in ieder geval door alle partijen als iets vulgairs gezien, en werd dan ook in eerste instantie ontwikkeld in de context van gokspelen - over menselijke onvolmaaktheid gesproken! De eerste wiskundige verhandeling over kansrekening werd in het midden van de zeventiende eeuw geschreven door onze landgenoot Christiaan Huygens (1629-1695). Een eeuw later zou gek genoeg juist Laplace er ook een belangrijk werk over schrijven. Begrippen als kansverdeling en verwachtingswaarde stammen al uit die tijd.

Het ontstaan van de kwantumtheorie
Pas in de twintigste eeuw kwam de gedachte op dat zuiver toeval zou kunnen bestaan (zoals gedefinieerd in het vorige hoofdstuk). Men begon te betwijfelen of de natuurwetten wel deterministisch waren, zodat de oude verklaring van onzekerheid als combinatie van determinisme en onwetendheid werd vervangen door een nieuw scenario: onzekerheid zou een gevolg kunnen zijn van *in*determinisme.
Rond 1900 waren namelijk enkele verschijnselen bekend, zoals radioactiviteit en de precieze eigenschappen van warmtestraling, die niet zo één twee drie door de klassieke natuurkunde verklaard konden worden. Dit leidde tot grote verwarring over de rol van toeval in de natuur. Het resultaat van deze periode van verwarring, die duurde van ongeveer 1900 tot 1925, was de kwantumtheorie.

Het werk van Max Planck (1858–1947) aan warmtestraling wordt vaak gezien als het begin van de ontwikkelingen die uiteindelijk tot de kwantumtheorie zouden leiden. Planck gebruikte in zijn theorie van warmtestraling uit 1900 geheel onverwacht een statistische aanpak om dit verschijnsel te beschrijven.[4]
Ook in het atoommodel van Bohr uit 1913, waarin de elektronen om de kern zwermen als planeten om de zon, spelen kansen een fundamentele rol. Dit zit hem in de 'kwantumsprong' die een elektron af en toe en volkomen onvoorspelbaar van de ene naar de andere baan kan maken. In 1918 beschreef Einstein deze kwantumsprongen op systematische wijze met behulp van de kanstheorie. We zullen hier later nog op terugkomen, omdat kwantumsprongen van elektronen de oorsprong zijn van licht dat atomen uitzenden.

Planck en Einstein gingen er echter beiden vanuit dat toeval altijd veroorzaakt wordt door een gebrek aan informatie en dachten dat het statistische element in hun aanpak slechts een voorlopig karakter had. Ook andere natuurkundigen in die tijd verwachtten dat spoedig een definitieve, deterministische theorie van de microscopische wereld zou worden ontdekt. In deze theorie zou, net als in Newtons theorie van de planeetbanen, geen ruimte zijn voor zuiver toeval.

In januari 1926 waren er inderdaad twee nieuwe theorieën op de markt. De ene, opgesteld door Werner Heisenberg (1901–1976), was zeer wiskundig van aard. Deze theorie bevatte niets dat men zich ook maar bij benadering natuurkundig kon voorstellen. Heisenberg was daar zelfs trots op, omdat hij al lang het idee had dat de microscopische natuur in principe niet voorstelbaar kon zijn. Bovendien kwam het revolutionaire karakter van zijn theorie zo duidelijk naar voren.
De andere theorie, afkomstig van Erwin Schrödinger (1887–1961), was eveneens op geavanceerde wiskunde gebaseerd, maar ging uit van de eenvoudige voorstelling dat alle vormen van materie (en dus ook deeltjes zoals elektronen) golven zijn. Schrödinger was veel conservatiever dan Heisenberg. Hij benadrukte niet alleen het aanschouwelijke karakter van zijn theorie, maar ook zijn visie dat deze deterministisch zou zijn. Hij bleek echter niet in staat deze visie wiskundig waar te maken.[5]

---

3. Van dit Vlaamse gezegde bestaat ook een Islamitische versie: "Allah laat dwalen wie hij wil."
4. Deze aanpak bleek alleen goed te werken in combinatie met het postulaat dat energie uit kleine pakketjes ofwel kwanta bestaat; vandaar de naam kwantumtheorie of kwantummechanica.
5. Sommigen betreuren dit falen van Schrödinger nog steeds; zie voetnoot 1.

Zuiver toeval!
Toen vond een beslissende ontwikkeling plaats. Max Born (1882–1970) stelde nog in datzelfde jaar (1926) voor om de 'materiegolven' van Schrödinger niet als werkelijk bestaande golven te interpreteren, maar als *kansen*. We zullen later in de hoofdstukken 9 en 10 in een eenvoudige situatie zien hoe dit in zijn werk gaat. Het voorstel van Born was een keerpunt in de geschiedenis van de natuurwetenschappen: het was de eerste keer dat kansen een fundamentele plaats kregen in de natuur, en niet slechts gebruikt werden om 'een gebrek aan informatie' op te vangen.

Dit idee vond vrijwel algehele instemming, en vormt tot op de dag van vandaag de basis voor ons begrip van de microscopische wereld. In 1927 lieten de natuurkundige Paul Dirac (1902–1984) en de wiskundige John von Neumann (1903–1957) zien hoe de theorieën van Heisenberg en Schrödinger samenhingen. Ze stelden een algemene theorie op die nu als *kwantummechanica* bekend staat. De materiegolven van Schrödinger werden nu geïnterpreteerd als *toestanden* van een kwantummechanisch systeem, te vergelijken met het geheel van alle plaatsen en snelheden van deeltjes dat de toestand van een klassieke systeem bepaalt. Het voorstel van Born om kansen een fundamentele plaats te geven werd daarmee sterk uitgebreid: niet alleen materiegolven maar alle toestanden in de kwantumtheorie spelen sindsdien een zuiver kanstheoretische rol.
De kwantummechanica vervangt op microscopische schaal de klassieke mechanica van Newton, en is volgens de interpretatie van Born, Dirac en von Neumann *geen* deterministische theorie.

Zuiver toeval?
Schrödinger en Einstein waren echter niet tevreden met deze uitkomst. Eind 1926 schreef Einstein in een brief aan Born, met wie hij bevriend was, de volgende beroemde woorden over de kwantummechanica:

> *"Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt."*

In vertaling:

> "De theorie levert veel op, maar brengt ons nauwelijks dichter bij het geheim van God. In ieder geval ben ik er van overtuigd dat hij niet dobbelt."

Bohr daarentegen schaarde zich (net als Heisenberg) onmiddellijk achter Born en begon zich zelfs als de kampioen van het indeterminisme te manifesteren. Volgens Bohr was het niet aan Einstein om te vertellen wat God had te doen en laten. Bohr en Einstein voerden tussen 1927 en 1949 een verhit debat over het bestaan van zuiver toeval in de natuur, maar werden het nooit met elkaar eens. Tot hun dood waren er ook geen harde argumenten om de een of de ander gelijk te geven: hun debat leek filosofisch en onoplosbaar.

Hoe nu verder?
Samengevat bestonden er in de tijd van Einstein en Bohr twee mogelijke scenario's:

1. De wereld is deterministisch; de toekomst ligt volledig vast door het verleden en er is geen ruimte voor zuiver toeval. Alle schijnbare toevalligheden worden veroorzaakt door een gebrek aan informatie die in principe wel voorhanden is. Einstein was een aanhanger van dit scenario.
2. De wereld is *niet* deterministisch; in de natuur bestaat zuiver toeval. Er zijn gebeurtenissen die onmogelijk te voorspellen zijn. Zelfs met de de meest geavanceerde meetapparatuur en toekomstige theorieën is niets te zeggen over de uitkomst. Dit was het standpunt van Bohr.

Opgave 2.1

a) We hebben in Hoofdstuk 1 onderscheid gemaakt tussen twee verschillende soorten toeval. Vat met behulp van de nieuwe informatie uit dit Hoofdstuk 2 in je eigen woorden samen wat het verschil is tussen deze twee soorten toeval.

b) Zoek op internet naar extra informatie over enkele onderwerpen uit dit hoofdstuk (het ontstaan van de kwantumtheorie, het debat tussen Einstein en Bohr, etc.). Schrijf nu op grond van je antwoord op de vorige opgave, deze tekst, én de extra informatie van internet zelf een korte inleiding op het onderwerp 'Bestaat Toeval?'. (Deze inleiding kun je dan later in je profielwerkstuk opnemen.)

We zullen nu gaan kijken hoe het debat na de dood van de beide tegenstanders toch nog werd beslist.

3

Het argument voor zuiver toeval

In 1964 toonde John Bell aan dat Einsteins opvatting dat "God niet dobbelt" tot bepaalde ongelijkheden leidt, de Bell-ongelijkheden. Deze ongelijkheden worden bij processen als de weerkaatsing van licht zowel door de kwantumtheorie als door het experiment geschonden. Dit suggereert dat Einstein geen gelijk kon hebben. In dit hoofdstuk gaan we de precieze logische redenering bestuderen die tot de conclusie leidt dat zuiver toeval bestaat. Deze redenering geeft het geraamte voor het hele project.

De Bell-ongelijkheden

Kort na de dood van Bohr (in 1962) leverde een toen nog onbekend fysicus, John Bell (1928–1990), een cruciale bijdrage aan de oplossing van het debat tussen Bohr en Einstein. Grappig genoeg behoorde Bell tot de minderheid van fysici die het standpunt van Einstein aanhing dat de wereld deterministisch is. Zijn bijdrage zou echter onbedoeld de overwinning van Bohr inluiden!
In 1964 slaagde deze Bell er namelijk in Einsteins filosofische opvatting over determinisme en toeval wiskundig te vertalen in bepaalde ongelijkheden, die later naar hem werden genoemd. Je gaat hier in het volgende hoofdstuk meteen al mee aan het rekenen.

Het werk van Bell heeft oorspronkelijk tot enige verwarring onder fysici geleid, en de wiskundige oorsprong van zijn ongelijkheden is ook pas later goed begrepen. Men zag in dat ze in eerste instantie los staan van de natuurkunde, maar veel algemener antwoord geven op de vraag hoe je aan een gegeven toevalsproces kunt zien of het onderliggende toeval zuiver is.
Het zal blijken dat je kunt zien of toeval zuiver is door te kijken naar ***correlaties***; dit zijn de kansen dat twee (of meer) gebeurtenissen beide plaatsvinden. Door goed na te denken over de betekenis van kansen en de wiskundige regels van de kansrekening en met behulp van elementaire logica zullen we uiteindelijk concluderen dat de correlaties van een toevalsproces dat veroorzaakt wordt door onwetendheid aan de ongelijkheden van Bell voldoen.

Bij eerste lezing is het volgende materiaal misschien nog erg abstract. Maak je hier niet al te veel zorgen over: de stukjes van de puzzel zullen (naarmate het project vordert) één voor één op hun plaats vallen.

Elementaire logische notatie en regels

Om het argument voor het bestaan van zuiver toeval uit te drukken voeren we een veel gebruikte logische notatie in. Deze notatie maakt gebruik van hoofdletters ($A, B, C, \ldots$) en symbolen ($\Rightarrow, \neg$). Hoofdletters worden in de logica gebruikt om uitspraken te representeren. Dit kunnen uitspraken zijn over de meest uiteenlopende zaken. Mogelijke uitspraken zijn: *"het regent"*, *"het is zes uur"*, "$2 = 3$", *"er zijn oneindig veel getallen"*. Eén ding hebben alle uitspraken echter gemeen: een uitspraak is ***waar*** of ***niet waar***.
De ontkenning van een uitspraak A noteren we met $\neg A$. De ontkenningen van bovenstaande uitspraken zijn: *"het regent niet"*, *"het is geen zes uur"*, "$2 \neq 3$", *"Er zijn eindig veel getallen"*. Dat een uitspraak A én zijn ontkenning $\neg A$ niet tegelijkertijd waar kunnen zijn heet in de logica het ***verbod op tegenspraak***.

De logische notatie $A \Rightarrow B$ betekent: ***als*** A, ***dan*** B. Dit wil zeggen: **als** uitspraak A waar is, **dan** is ook uitspraak B waar. Nemen we voor A de uitspraak *"het regent"* en voor B de uitspraak *"je wordt nat"* dan betekent $A \Rightarrow B$: *"**als** het regent, **dan** word je nat"*.
Merk op dat de uitspraak *"als het regent, dan word je nat"* niets zegt over het feit of het regent of niet. We weten alleen: **als** het regent, **dan** mogen we concluderen dat je nat wordt. Meer in het algemeen zegt de uitspraak $A \Rightarrow B$ niets over het al dan niet waar zijn van uitspraak A. Slechts ***als*** we weten dat A waar is ***dan*** mogen we uit $A \Rightarrow B$ concluderen dat B waar is. In de logica heet deze regel de ***modus ponens***, en je gebruikt hem zowel in het dagelijks leven als in de wiskunde ontelbare keren zonder er bij stil te staan.

Opgave 3.1

Geef zowel binnen als buiten de wiskunde een paar voorbeelden van:
a) de modus ponens;
b) het verbod op tegenspraak,

Op welke manier vinden we deze logische notatie en regels terug in onze redenering?
Door geschikte uitspraken A en B te kiezen en gebruik te maken de modus ponens en het verbod op een tegenspraak willen we uiteindelijk tot de conclusie komen dat zuiver toeval bestaat.

We kiezen daartoe de volgende uitspraken A en B:

$$\begin{aligned} A &= \text{Toeval komt door onwetendheid.} \\ B &= \text{De bijbehorende correlaties voldoen aan Bell-ongelijkheden.} \end{aligned}$$

'Onwetendheid' betekent hier - voor alle duidelijkheid - gebrek aan informatie die in principe wel voorhanden is.
De bewering $A \Rightarrow B$ betekent in dat geval:

Als toeval komt door onwetendheid, ***dan*** voldoen de correlaties aan de Bell-ongelijkheden. (3.1)

Op dit moment heb je nog geen enkele reden om aan te nemen dat bovenstaande bewering juist is. Het bewijs van bovenstaande uitspraak zal ons in de eerste helft van dit project bezighouden.
Nogmaals: we zeggen daarbij helemaal niet dat ieder toevalsproces door onwetendheid komt, we zeggen alleen: *als* toeval door onwetendheid komt, *dan* voldoen de bijbehorende correlaties aan de Bell-ongelijkheden. Als we van een *gegeven* toevalsproces weten dat het veroorzaakt wordt door onwetendheid, dan mogen we met de modus ponens concluderen dat de correlaties in *dat* proces aan de Bell-ongelijkheden voldoen.

De schending van de Bell-ongelijkheden als bewijs voor zuiver toeval
We stellen het bewijs van bewering (3.1) dus nog even uit, maar nemen voor nu even aan dat deze bewering waar is. We hebben al opgemerkt dat er bepaalde processen in de kwantummechanica zijn waarvan de bijbehorende correlaties ***niet*** aan de Bell-ongelijkheden voldoen. Wat kunnen we zeggen over deze toevalsprocessen? Worden ze veroorzaakt door onwetendheid of is het onderliggende toeval zuiver van aard?

We bekijken een toevalsproces waarvan de correlaties ***niet*** aan de Bell-ongelijkheden voldoen. Stel dat het toeval in een dergelijk proces wordt veroorzaakt door onwetendheid. We mogen dan met de modus ponens uit (3.1) concluderen dat de correlaties in dit toevalsproces aan de Bell-ongelijkheden voldoen. Volgens de wet op tegenspraak kan een toevalsproces echter niet zowel wél als níet aan de Bell-ongelijkheden voldoen (uitspraak B en $\neg B$ kunnen niet beide waar zijn). Het onderliggende toeval kan in dit proces dus niet veroorzaakt worden door onwetendheid.

We kunnen deze conclusie als volgt formuleren:

Als de correlaties van een toevalsproces ***niet*** voldoen aan de Bell-ongelijkheden, dan wordt het toeval ***niet*** veroorzaakt door onwetendheid. (3.2)

Opgave 3.2

Bestudeer het bovenstaande argument goed en geef er een algemene versie van. Met andere woorden, bewijs dat uit $A \Rightarrow B$ volgt dat $\neg B \Rightarrow \neg A$ (voor willekeurige uitspraken A en B).[1]

1. Het geldt ook in de omgekeerde richting: $\neg B \Rightarrow \neg A$ impliceert $A \Rightarrow B$, zodat de beide uitspraken logisch equivalent zijn. We zullen deze omgekeerde implicatie echter niet nodig hebben.

In hoofdstuk 1 hebben we gezien dat elk toeval dat ***niet*** veroorzaakt wordt door onwetendheid *per definitie* zuiver van aard moet zijn. Toevalprocessen die de Bell-ongelijkheden schenden moeten dus gebaseerd zijn op zuiver toeval! Met andere woorden:

> Als de correlaties van een toevalsproces ***niet*** voldoen aan de Bell-ongelijkheden, dan is het onderliggende toeval zuiver. (3.3)

Om het bestaan van zuiver toeval te bewijzen, is het dus voldoende om te laten zien dat er toevalsprocessen bestaan die de Bell-ongelijkheden schenden. Met behulp van de modus ponens kunnen we dan immers uit (3.3) concluderen dat het onderliggende toeval zuiver is. Dit is precies de inhoud van het tweede deel van dit project: we gaan na een korte inleiding op de kwantumtheorie een toevalsproces met absorptie of doorlating van fotonen doorrekenen. We zullen zien dat de correlaties in dat proces *niet* aan de Bell-ongelijkheden voldoen. Niet alleen berekening geeft dit resultaat: het bijbehorende experiment bevestigt de theorie.

Opgave 3.3

Beschrijf nu in je eigen woorden hoe het bestaan van zuiver toeval volgt.

Hiermee kreeg Bohr uiteindelijk gelijk: de schending van de Bell-ongelijkheden toont aan dat dit proces gebaseerd is op zuiver toeval, zodat scenario 1 uit het vorige hoofdstuk (het scenario van Einstein, waarin geen plaats is voor zuiver toeval) onhoudbaar is. Het bestaan van zuiver toeval heeft ook buiten de natuurkunde vele gevolgen, volgens sommigen zelfs voor het menselijk bewustzijn en de vrije wil.

Het vervolg van dit boekje valt in drie delen uiteen.

- In het eerste deel (hoofdstuk 4 t/m 7) wordt het bewijs geschetst van bewering (3.1). Dit bewijs is volledig op twee onderdelen na, die te uitgebreid zijn om in het basisdeel van de tekst op te nemen:
  1. Één van die onderdelen is de zogenaamde *Dutch Book* stelling uit de kansrekening, die in hoofdstuk 6 wel wordt vermeld maar niet bewezen. Je kunt je als keuzeonderwerp in de precieze betekenis en het bewijs van deze stelling verdiepen (zie hoofdstuk 15). Dit heeft verder niets met kwantumtheorie of zelfs met natuurkunde te maken.
  2. Het tweede onderdeel betreft de complicatie dat in de kwantumwereld niet alle experimenten gelijktijdig kunnen worden uitgevoerd. In de context van een enqête zou dit betekenen dat niet alle vragen tegelijk gesteld (laat staan beantwoord) kunnen worden. Op dit moment kun je je zo iets vreemds misschien moeilijk voorstellen, maar in de loop van het project zul je er hopelijk enigszins aan wennen. Je hoeft nu slechts te weten dat de uitspraak (3.1), met precies dezelfde Bell-ongelijkheden als wanneer je wél alle vragen tegelijk kunt stellen, ondanks deze complicatie tóch geldt. Om deze conclusie te bereiken moet echter wel een plausibele extra aanname wordt gedaan: namelijk dat de lichtsnelheid de maximale signaalsnelheid is in de natuur. Als je natuurkunde - en dan vooral kwantummechanica - leuk vindt kun je hier je keuzeonderwerp van maken: zie hoofdstuk 16.
- In het tweede deel (hoofdstuk 8 t/m 14 laat je in berekeningen rond gepolariseerd licht zien dat de bijbehorende correlaties de Bell-ongelijkheden schenden. Hierin zit zowel wiskunde als natuurkunde verwerkt:
  1. De wiskunde gaat over de meetkunde van het platte vlak, inclusief vectoren en de nieuwe begrippen *inproduct* en *tensorproduct*.
  2. De natuurkunde gaat eerst over fotonen en polaroidglazen en daarna over één van de meest spectaculaire verschijnselen in de natuur, genaamd *EPR-correlaties*.

  Met deze schending heb je volgens (3.3) dan bewezen dat zuiver toeval bestaat.
- Het derde en laatste deel van het boekje bestaat uit de keuzeonderwerpen. Dit zijn losse hoofdstukken die ieder een aanzet geven tot een eigen staart aan je profielwerkstuk. Sommige van deze hoofdstukken bevatten details waar in de eerste twee delen over heen is gelopen: de twee keuzeonderwerpen die zojuist zijn genoemd zijn daar een voorbeeld van. Andere gaan over de mogelijke gevolgen van het bestaan van toeval. Hiermee kun je je profielwerkstuk zowel een meer wiskundige, en natuurkundige of zelfs een filosofische draai geven (determinisme en vrije wil).

4

De Bell-ongelijkheid voor drie vragen

In dit hoofdstuk ga je zelf aan de slag! Je went aan de notatie in het boekje en leidt in een speciaal geval de beroemde Bell-ongelijkheden af. Deze afleiding zal dan in de volgende hoofdstukken veel algemener worden gemaakt.

Stel dat je drie vragen A, B en C hebt, die ieder met ja $(+)$ of nee $(-)$ beantwoord kunnen worden. Denk bijvoorbeeld aan de marktonderzoekster: deze keer wil ze niet alleen weten of iemand een dvd-speler heeft, maar ook of hij/zij tevens een cd-speler en een iPod bezit. De drie vragen

A: “Heeft u een dvd-speler?”
B: “ Heeft u een cd-speler?”
C: “Heeft u een iPod”?

worden aan een aantal proefpersonen gesteld. Het resultaat van een enquête onder een gegeven groep personen (in dit geval tien) is een tabel van de volgende vorm:

A	B	C
+	-	-
-	+	+
-	-	+
+	-	-
+	+	-
+	+	+
+	-	-
-	-	+
-	+	+
-	+	-

Tabel 4.1: Resultaten enquête onder tien personen met drie vragen

Frequentie en relatieve frequentie
Hebben we het resultaat van een enquête dan kunnen we tellen hoe vaak vraag A positief beantwoord is. Zoals je weet heet dit de ***frequentie*** van het antwoord ‘ja’ op vraag A. Je kunt zelf natellen dat de frequentie van het antwoord ‘ja’ op vraag A in de gegeven tabel gelijk is aan 5. Omdat er in het totaal 10 personen ondervraagd zijn, zeggen we dat de ***relatieve frequentie*** gelijk is aan $5/10$. Als de steekproef representatief en voldoende groot is zal de relatieve frequentie een indicatie geven voor de kans dat vraag A positief beantwoord wordt. Hoewel het hier slechts om een groep van 10 ondervraagden gaat zullen we er vanuit gaan dat de relatieve frequentie een goede indicatie is voor de kans dat een persoon vraag A met ‘ja’ beantwoordt. Met wiskundige symbolen noteren we dit als $P(A = +) = 1/2$. Een gegeven enquête bepaalt de

volgende kansen:[1]

- $P(A = +)$, de kans dat vraag A met ja beantwoord wordt;
- $P(B = +)$, de kans dat vraag B met ja beantwoord wordt;
- $P(C = +)$, de kans dat vraag C met ja beantwoord wordt;
- $P(A = -)$, de kans dat vraag A met nee beantwoord wordt;
- $P(B = -)$, de kans dat vraag B met nee beantwoord wordt;
- $P(C = -)$, de kans dat vraag C met nee beantwoord wordt.

De volgende opgave is alleen maar bedoeld om je vingers warm te krijgen!

Opgave 4.1

a) Bereken deze getallen voor tabel 4.1 en ga na dat

$$P(A = +) + P(A = -) = 1; \tag{4.1}$$
$$P(B = +) + P(B = -) = 1; \tag{4.2}$$
$$P(C = +) + P(C = -) = 1. \tag{4.3}$$

b) Hoe kun je dit zonder enige berekening en voor een willekeurige tabel inzien?

Correlaties
In de Hoofdstuk 3 hebben we al kort gesproken over het begrip ***correlaties***. Dit zijn kansen dat twee gebeurtenissen tegelijkertijd plaatsvinden. We kunnen bijvoorbeeld kijken naar de kans dat vraag A en B beide met ja beantwoord worden. Deze kans zullen we noteren met $P(A = +\ en\ B = +)$. Op dezelfde manier kunnen we ook gaan kijken naar de gevallen:

- $P(A = +\ en\ B = -)$: de kans dat vraag A met ja beantwoord wordt en vraag B met nee.
- $P(A = -\ en\ B = +)$: de kans dat vraag A met nee beantwoord wordt en vraag B met ja.
- $P(A = -\ en\ B = -)$: de kans dat vraag A en B beide met nee beantwoord worden,

en soortgelijk voor A en C of B en C in plaats van A en B. Voor de ongelijkheid van Bell blijken juist de volgende combinaties interessant te zijn:

$$P(A \neq B) = P(A = +\ en\ B = -) + P(A = -\ en\ B = +); \tag{4.4}$$
$$P(A \neq C) = P(A = +\ en\ C = -) + P(A = -\ en\ C = +); \tag{4.5}$$
$$P(B \neq C) = P(B = +\ en\ C = -) + P(B = -\ en\ C = +). \tag{4.6}$$

Opgave 4.2

Bereken $P(A \neq B), P(A \neq C), P(B \neq C)$ voor de gegeven tabel.

Wat Bell opviel is dat nu geldt (ga na)

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C). \tag{4.7}$$

Dit is het eenvoudigste voorbeeld van een ***ongelijkheid van Bell***.

Voorlopig bewijs van de ongelijkheid van Bell
De grote vraag is nu natuurlijk of (4.7) toevallig voor onze tabel geldt, of dat (4.7) voor iedere mogelijke tabel geldt die het resultaat van een enquête met drie vragen onder een willekeurig aantal personen weergeeft.

Opgave 4.3

a) Maak twee (of zoveel je wilt) andere tabellen van dezelfde lengte en breedte. De antwoorden op de vragen mag je **volkomen willekeurig** kiezen! Er is niets op tegen dat in één van je tabellen bijvoorbeeld alleen maar plussen staan, en dat in een andere de plussen en minnen elkaar in evenwicht houden.

1. Voor kansen wordt meestal de letter P gebruikt (voor het Engelse *probability*).

b) Bereken voor iedere tabel de getallen $P(A \neq C)$, $P(A \neq B)$ en $P(B \neq C)$.
c) Geldt voor iedere tabel de ongelijkheid $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$?

Het lijkt er dus op dat het geen toeval is (haha) dat Tabel 4.1 voldoet aan de Bell-ongelijkheid $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$.

Opgave 4.4

Bewijs dat voor alle mogelijke tabellen geldt: $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$.

Door heel goed nadenken kun je deze opgave zonder enige berekening maken. Als je echter liever concreet aan het rekenen slaat, kun je als volgt te werk gaan.
Noem de lengte van de tabel (dus het aantal ondervraagde personen) N. Geef verder het aantal keren $+++$ aan met n_{+++}, het aantal keren $++-$ met n_{++-} enzovoort. Dan gelden dus gelijkheden als:

$$P(A = +) = (n_{+++} + n_{++-} + n_{+-+} + n_{+--})/N; \tag{4.8}$$
$$P(A \neq B) = (n_{-+-} + n_{-++} + n_{+-+} + n_{+--})/N. \tag{4.9}$$

Schrijf nu ook $P(B \neq C)$ en $P(A \neq C)$ in de bovenstaande notatie en bewijs hiermee dat

$$0 \leq P(A \neq B) + P(B \neq C) - P(A \neq C).$$

Dit is precies de ongelijkheid in de opgave.

Je hebt nu dus bewezen dat *als correlaties uit een tabel kunnen worden afgelezen*, dan voldaan is aan de Bell-ongelijkheid $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$. In de volgende hoofdstukken zullen we dit resultaat uitbreiden tot: *als correlaties uit een toevalsproces komen waarbij het toeval een gevolg is van gebrek aan informatie (die in principe voorhanden is), dan is voldaan aan* $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$.

Een tegenvoorbeeld
Het is dus interessant om een voorbeeld te geven van correlaties die *niet* aan (4.7) voldoen. Zoals uitgelegd in het vorige hoofdstuk kun je dan dus concluderen dat het onderliggende toeval zuiver is. We beperken ons nu eventjes puur tot de wiskunde; de fysische achtergrond van de volgende correlaties komt later aan bod.

Er bestaat een toevalsproces in de natuur dat kan worden uitgedrukt in drie ja/nee vragen A, B, en C, net als boven, waarvan de inhoud bepaald wordt door de keuze van respectievelijk hoeken x_A, x_B en x_C. Deze hoeken kunnen vrij worden gekozen: iedere keuze bepaalt een andere vraag. Dit proces blijkt de volgende correlaties te hebben:

$$P(A \neq B) = \sin^2(x_A - x_B); \tag{4.10}$$
$$P(A \neq C) = \sin^2(x_A - x_C); \tag{4.11}$$
$$P(B \neq C) = \sin^2(x_B - x_C). \tag{4.12}$$

Opgave 4.5

Laat zien dat er hoeken bestaan waarvoor $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$ geschonden wordt door (4.10) tot en met (4.12). Pak dit als volgt aan:
a) Vul (4.10) tot en met (4.12) in in $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$.
b) Kies $x_A = 0$, $x_B = 3x$ en $x_C = x$ en toon aan dat de ongelijkheid $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$ - nu uitgedrukt in de enig overgebleven hoek x - de vorm heeft:

$$0 \leq \sin^2(3x) + \sin^2(2x) - \sin^2(x). \tag{4.13}$$

c) Plot de functie $f(x) = \sin^2(3x) + \sin^2(2x) - \sin^2(x)$ op je grafische rekenmachine en stel vast dat de functie voor bepaalde x tussen 0 en 2π negatief is. Daarmee is (4.13) en dus ook $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$ geschonden. Voor welke waarden van x is dat ongeveer het geval?

5

Uitkomsten en gebeurtenissen

In het vorige hoofdstuk ben je in aanraking gekomen met het uitrekenen van kansen op verschillende gebeurtenissen. We gaan nu de algemene wiskundige regels die schuil gaan achter die berekeningen beter bekijken. In dit hoofdstuk voeren we de abstracte begrippen uitkomsten, gebeurtenissen, uitkomstruimte en gebeurtenisruimte in. Deze begrippen hebben we nodig om de wiskundige regels van de kanstheorie te formuleren. Dat gebeurt in het volgende hoofdstuk. We definiëren de begrippen aan de hand van twee voorbeelden van toevalsprocessen waar je al vertrouwd mee bent: het gooien met een dobbelsteen en een enquête.

In dit hoofdstuk voeren we enkele sleutelbegrippen in die de basis vormen van de wiskundige kanstheorie. Deze begrippen zullen je waarschijnlijk vertrouwd in de oren klinken, maar om verder te komen moeten we af en toe heel precies te werk gaan: dat is nu eenmaal de aard van de wiskunde!
In plaats van het woord ***toevalsproces***, dat we in het vervolg meestal zullen gebruiken, ben je misschien gewend aan de term ***kansexperiment***. Je kunt deze door elkaar gebruiken (het is maar wat je gewend bent).

De uitkomstruimte van een toevalsproces.
Elk toevalsproces heeft een aantal mogelijke ***uitkomsten***. Een opsomming van alle mogelijke uitkomsten noemen we de ***uitkomstruimte*** van het toevalsproces. We zetten de mogelijke uitkomsten tussen accolades $\{\ldots\}$; in de wiskunde is dit de gebruikelijke notatie voor een verzameling.
Een aantal vertrouwde voorbeelden van uitkomstruimten zijn de volgende:

Voorbeeld 1:
De uitkomstruimte van een worp met een dobbelsteen is $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Voorbeeld 2:
De uitkomstruimte van een vraag aan een willekeurige proefpersoon die slechts postitief of negatief beantwoord kan worden is $\{ja, nee\}$; we kunnen dit ook noteren als $\{+, -\}$, zoals in Hoofdstuk 4. De uitkomstruimte voor twee van dergelijke vragen A en B is $\{ja/ja, ja/nee, nee/ja, nee/nee\}$ ofwel $\{++, +-, -+, --\}$.

Opgave 5.1

- **a)** Geef de uitkomstruimte bij twee worpen met één dobbelsteen.
- **b)** Geef de uitkomstruimte bij één worp met twee dobbelstenen.
- **c)** Onder welke aanname is het antwoord op vraag a en b hetzelfde?

Opgave 5.2

a) Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk bij drie ja/nee vragen? Geef de bijbehorende uitkomstruimte en breng deze in verband met je berekeningen in Hoofdstuk 4.
b) Hoeveel mogelijkheden zijn er bij 4 vragen?
c) Stel we hebben een enquête met n vragen. Druk het aantal mogelijke uitkomsten uit in n.

Opgave 5.3

Bedenk zelf een toevalsproces en geef de bijbehorende uitkomstruimte.[1]

Gebeurtenissen.
Meestal willen we niet alleen de kans op één mogelijke uitkomst weten, maar zijn we ook benieuwd naar de kans op een combinatie van verschillende uitkomsten. Bij het werpen met een dobbelsteen zijn we niet alleen geïnteresseerd in de kans op '6 gooien', maar ook in de kans op '5 of 6 gooien' en de kans op 'een even aantal ogen'. Een combinatie van één of meerdere uitkomsten noemen we een ***gebeurtenis***. In Hoofdstuk 4 hebben we al te maken gehad met dergelijke combinaties van uitkomsten (ofwel gebeurtenissen), zie onderstaande opgave.

Voorbeeld:
We zagen al dat $\{++, +-, -+, --\}$ de uitkomstruimte is bij een enquête met twee vragen A en B. Een mogelijke gebeurtenis bij dit kansexperiment is dat 'de eerste vraag met ja beantwoord wordt' ofwel '$A = +$'. Deze gebeurtenis correspondeert met de uitkomsten $\{++, +-\}$. Een andere gebeurtenis is '$A \neq B$' en komt overeen met de uitkomsten $\{+-, -+\}$. Ook de situatie dat vraag A en B beide positief beantwoord worden is een gebeurtenis. Deze correspondeert slechts met één enkele uitkomst namelijk $\{++\}$. Let op: het is dus ook mogelijk dat een gebeurtenis slechts één mogelijke uitkomst bevat.

Opgave 5.4

a) *Over de enquête met drie vragen.* Welke combinatie van uitkomsten correspondeert met de gebeurtenissen:
(a) '$A = +$'
(b) '$A = + \text{ en } B = -$'
(c) '$A \neq B$'

b) *Over het werpen van een dobbelsteen.* Welke combinatie van uitkomsten correspondeert met de gebeurtenissen:
(a) 'het geworpen aantal ogen is 4.'
(b) 'het geworpen aantal ogen is even.'
(c) 'het geworpen aantal ogen is niet 3 of 5.'

Deze opgave is niet bepaald moeilijk, maar als het goed is ben je nu opnieuw aan het denken gezet over je berekeningen in Hoofdstuk 4: wat je daar feitelijk hebt gedaan is het rekenen met kansen op gebeurtenissen, gezien als combinaties van uitkomsten. En wat je aan deze twee voorbeelden heel duidelijk kunt zien is dit:

Een gebeurtenis is niets anders dan een gedeelte van de uitkomstruimte. [2]

We hebben gezien dat de uitkomstruimte van een kansexperiment bestaat uit een opsomming van alle mogelijke uitkomsten. Ook van alle mogelijke gebeurtenissen met betrekking tot een bepaalde uitkomstruimte kunnen we een opsomming maken. Een opsomming van **álle** mogelijke gebeurtenissen noemen we de ***gebeurtenisruimte***.
Het verschil tussen uitkomsten en gebeurtenissen, en daarmee ook tussen de uitkomstruimte en de gebeurtenisruimte van een toevalsproces, is heel erg belangrijk voor dit project. Hoe sneller je er aan went, hoe

1. In dit boekje beperken we ons tot eindige uitkomstruimten, want dat is genoeg om de vraag of toeval bestaat te kunnen beantwoorden. Er bestaan natuurlijk ook toevalsprocessen waarbij de uitkomstruimte oneindig is. Binnen de wereld van het oneindige heb je dan weer een verschil tussen aftelbaar oneindig (zoals de natuurlijke getallen $1, 2, \ldots$), continu oneindig (zoals de reëele getallen met willekeurige decimaalontwikkelling: denk bijvoorbeeld aan het random genereren van een getal tussen 0 en 1 door een computer), en zelfs nog veel 'oneindigere' vormen van oneindig!
2. Als je de uitkomstruimte als verzameling Z ziet, is een gebeurtenis dus niets anders dan een gedeelte van de verzameling Z. In de wiskunde wordt dit ook wel een deelverzameling van Z genoemd. Deze terminologie was in de jaren zestig heel gebruikelijk op de middelbare school, maar is sindsdien vrijwel uitgestorven.

beter.

Opgave 5.5

Over de enquête met twee vragen. We hebben al gezien dat de uitkomstruimte gelijk is aan $\{++, +-, -+, --\}$. Wat is de bijbehorende gebeurtenisruimte?

Let op!

We hebben al gezien dat één uitkomst op zichzelf ook een gebeurtenis is.[3]

Ten tweede is het een nuttige afspraak in de wiskunde dat elke gebeurtenisruimte ook de 'onmogelijke' gebeurtenis bevat. Bij deze gebeurtenis wordt geen enkele mogelijke uitkomst gerealiseerd. De onmogelijke gebeurtenis omvat dus geen enkele uitkomst wat je als volgt kan noteren: $\{\}$. In de wiskunde is het echter gebruikelijk dit te noteren met $\emptyset$.[4]

Ten slotte hoort ook de 'zekere' gebeurtenis, die de combinatie is van alle mogelijke uitkomsten, bij de gebeurtenisruimte. We noemen de zekere gebeurtenis Z. In het voorbeeld van de opgave is dus $Z = \{++, +-, -+, --\}$. Je ziet dus dat Z hetzelfde is als de totale uitkomstruimte.

Als je de gebeurtenissen $\emptyset$ en Z in de vorige opgave was vergeten moet je die dus nog snel even toevoegen! De gebeurtenisruimte bestaat immers uit álle mogelijke gebeurtenissen.

We geven een gebeurtenis meestal aan met een letter als G. De kans op deze gebeurtenis wordt dan genoteerd met $P(G)$. In het vervolg kom je dikwijls paren van gebeurtenissen tegen, die we dan G_1 en G_2 noemen. Het volgende begrip speelt daarbij een centrale rol.

Definitie 5.1 *Twee gebeurtenissen G_1 en G_2 sluiten elkaar uit als ze niet tegelijkertijd kunnen plaatsvinden. Voor de bijbehordende twee gedeelten van de uitkomstruimte betekent dit dat ze geen enkele overlap hebben (met andere woorden, niet één dezelfde uitkomst bevatten).*

In het voorbeeld van de enquête met twee vragen sluiten de gebeurtenissen $G_1 = \{++, +-\}$ en $G_2 = \{--\}$ elkaar uit, terwijl G_1 en $G_3 = \{++\}$ dat niet doen. Immers als iemand beide vragen van de enquête met 'ja' beantwoordt vindt zowel gebeurtenis G_1 en G_3 plaats.

Opgave 5.6

a) Welke paren gebeurtenissen in opgave 5.4 sluiten elkaar uit (en welke dus niet)?

b) We hebben gezien dat ook Z een gebeurtenis is. Bestaat er een gebeurtenis G zodat Z en G elkaar uitsluiten?

Nu weet je genoeg om over te gaan tot de wiskundige regels voor kansen!

3. Soms wordt een uitkomst daarom een ***elementaire gebeurtenis*** genoemd.
4. Dit symbool staat voor de lege verzameling. Dat is een verzameling zonder elementen.

6

Kansverdelingen en kansfuncties

Nu je weet wat een uitkomstruimte en een gebeurtenisruimte zijn, voeren we de begrippen kansverdeling en kansfunctie in. Je zult zien dat een kansfunctie in de gevallen waar je mee vertrouwd bent, zoals het gooien met een dobbelsteen, aan bepaalde wiskundige regels voldoet. Laten we de voorbeelden los en formuleren we deze regels in meer algemene zin dan krijgen we de zogenaamde axioma's van de klassieke kansrekening.

De kansverdeling op een uitkomstruimte.
Bij een toevalsproces met bijbehorende uitkomstruimte horen kansen op elk van deze uitkomsten. Een overzichtje van alle mogelijke uitkomsten van een toevalsproces met de bijbehorende kans noemen we een *kansverdeling*. We zullen in het volgende hoofdstuk bekijken welke betekenis deze kansen precies hebben. Maar ook zonder een dergelijke studie is iedereen het er wel over eens dat de kansverdeling voor het werpen met een 'eerlijke' dobbelsteen er als volgt uit ziet:

Uitkomst	*Kans*
1	$P(1) = \frac{1}{6}$
2	$P(2) = \frac{1}{6}$
3	$P(3) = \frac{1}{6}$
4	$P(4) = \frac{1}{6}$
5	$P(5) = \frac{1}{6}$
6	$P(6) = \frac{1}{6}$

Tabel 6.1: Kansen bij het dobbelen

Opgave 6.1

Maak een soortgelijke kansverdeling voor de uitkomstruimte van een enquête met drie vragen op grond van Tabel 4.1 uit Hoofdstuk 4 (je mag er hierbij vanuit gaan dat de tabel een goede representatie is van de Nederlandse bevolking).

Regels voor de kansverdeling.
In het bovenstaande voorbeeld (en talloze anderen uit je schoolboeken over statistiek en kansrekening) zie je dat een kansverdeling aan twee eenvoudige regels voldoet:

1. $0 \leq P(U) \leq 1$, waarbij U een willekeurige uitkomst is;
2. Als $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de uitkomstruimte is, dan geldt $P(U_1) + P(U_2) + \cdots + P(U_n) = 1$.

De kansfunctie op een gebeurtenisruimte.
Met behulp van een kansverdeling op een uitkomstruimte kunnen we ook de kans $P(G)$ op een willekeurige gebeurtenis G uitrekenen (zoals je je uit het vorige hoofdstuk herinnert is G niets anders dan een gedeelte van de uitkomstruimte). Het volgende zal je overbekend voorkomen en je beschouwt het misschien als een belediging van je verstand dat we hier over beginnen, maar het is onze bedoeling dat je even stil staat bij manipulaties die zo voor de hand liggen dat je er al lang niet meer over nadenkt.

Kijk bijvoorbeeld eens naar de volgende gebeurtenissen die bij het werpen met een dobbelsteen op kunnen treden.

- A: het geworpen aantal ogen is 4.
- B: het geworpen aantal ogen is 1 of 2.
- C: het geworpen aantal ogen is even.
- D: het geworpen aantal ogen is oneven.
- E: het geworpen aantal ogen is zes.
- F: het geworpen aantal ogen is minder dan zes.
- G: het geworpen aantal ogen is niet 3 of 5.

Als je het vorige hoofdstuk goed hebt begrepen, weet je nu dat de gebeurtenis A correspondeert met het deel $\{4\}$ van de uitkomstruimte en de gebeurtenis D met het deel $\{1, 3, 5\}$, enzovoort. In plaats van $P(A)$ kun je dus ook $P(\{4\})$ schrijven,[1] en uit Tabel 6.1 lees je af dat $P(\{4\}) = 1/6$.

Opgave 6.2

a) Schrijf $P(B)$ tot en met $P(G)$ in bovenstaande notatie.
b) Bereken de kans op de gebeurtenissen B tot en met G volgens je kennis van school.

Regels voor de kansfunctie
Om $P(B)$ te berekenen heb je bewust of onbewust gebruik gemaakt van de eigenschap

$$P(\{1, 2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \tag{6.1}$$

Ook als het ingewikkelder wordt, blijken alle berekeningen in de kansrekening van de middelbare school te berusten op drie eigenschappen van de functie P die bij elke gebeurtenis de bijbehorende kans geeft.

Definitie 6.1 *Een functie met als domein een gebeurtenisruimte van een bepaald toevalsproces die aan de volgende drie eisen voldoet heet een **kansfunctie**:*

1. $0 \leq P(G) \leq 1$, *waarbij G een willekeurige gebeurtenis is;*
2. $P(Z) = 1$, *waarbij Z de hele uitkomstruimte is;*
3. $P(G_1 \; of \; G_2) = P(G_1) + P(G_2)$, *waarbij G_1 en G_2 gebeurtenissen zijn die elkaar uitsluiten (zie vorige hoofdstuk).*

Opgave 6.3

In plaats van symbolen kun je ook woorden gebruiken om de drie eigenschappen van een kansfunctie te formuleren. Eigenschap 1 wordt dan bijvoorbeeld: "De waarde van een kansfunctie is voor een willekeurige gebeurtenis is altijd groter of gelijk aan 0 en kleiner of gelijk aan 1". Formuleer op deze manier ook eigenschap 2 en 3 in woorden in plaats van symbolen.

Misschien zien de eigenschappen er ingewikkeld uit. Als je ze echter toepast op het voorbeeld van het werpen met een dobbelsteen, zijn ze volkomen vanzelfsprekend. De derde eigenschap bijvoorbeeld zegt dat je de kans op 1 of 2 gooien kunt uitrekenen door de kans op 1 en de kans op 2 bij elkaar op te tellen: dat is precies (6.1).

---

1. Op school ben je waarschijnlijk de notatie $P(X = 4)$ gewend waarbij X een toevalsvariabele is die het aantal ogen van de dobbelsteen representeert

Opgave 6.4

a) Ga precies na in je antwoord van de vorige opgave waar je gebruik hebt gemaakt van de bovenstaande drie eigenschappen.
b) Welke gedeelten van de uitkomstruimte horen bij de gebeurtenissen A, B en 'A of B'? Bereken $P(A\ of\ B)$. Is dit gelijk aan $P(A) + P(B)$? Waarom wel/niet?
c) Beantwoord de vorige vraag ook voor de gebeurtenissen B en C.

Een kansfunctie op de gebeurtenisruimte van een toevalsproces ligt geheel vast door de kansverdeling van de uitkomstruimte van het bewuste toevalsproces. Kennen we de kansverdeling, dan kunnen we met bovenstaande eigenschappen immers de kans op elke gebeurtenis (ofwel elk gedeelte van de uitkomstruimte) uitrekenen. Dit is precies wat je gedaan hebt bij het uitrekenen van de kansen op gebeurtenissen A tot en met G.Omgekeerd wordt de kansverdeling op de uitkomstruimte bepaald door de kansfunctie op de gebeurtenisruimte.

Opgave 6.5

Waarom is dat laatste het geval?

De drie eigenschappen in de definitie van een kansfunctie lijken volkomen vanzelfsprekend. 'Natuurlijk' ligt een kans tussen 0 en 1 en ook het optellen van kansen op gebeurtenissen die elkaar niet overlappen ligt voor de hand. Maar ook al ben je deze regels in tientallen voorbeelden tegengekomen, we mogen er niet vanuit gaan dat ze voor álle mogelijke toevalsprocessen gelden. We doen hier wiskunde, en daar gaat het niet om retoriek maar om zekerheid. Deze zekerheid wordt gegeven door de volgende stelling. Maar let op: deze zegt slechts iets over toevalsprocessen die veroorzaakt worden door onwetendheid en niet over toevalsprocessen gebaseerd op zuiver toeval.

Stelling 6.1 *(Dutch Book Theorem):*
Als het toeval in een toevalsproces veroorzaakt wordt door onwetendheid, dan worden de bijbehorende kansen op gebeurtenissen vastgelegd door een kansfunctie. Met andere woorden, er bestaat een onderliggende kansverdeling op de uitkomstruimte waaruit de kansfunctie op de gebeurtenisruimte kan worden berekend met behulp van de eigenschappen 1 tot en met 3 in Definitie 6.1.

Om deze stelling te kunnen bewijzen moeten we, net zoals bij het begrip toeval, onderscheid maken tussen 'onzuivere' en 'zuivere' kansen. Hiervoor worden de begrippen mentale en fysische kansen gebruikt. Het exacte bewijs van deze stelling is één van de onderwerpen die je kunt kiezen om je na het einde van het algemene gedeelte van deze cursus in te specialiseren.[2]

In het volgende hoofdstuk zullen we de theorie van kansfuncties toepassen op het toevalsproces met drie ja/nee vragen en bewijzen dat correlaties van kansen die bepaald worden door een kansverdeling met bijbehorende kansfunctie, voldoen aan de ongelijkheden van Bell.

In combinatie met het *Dutch Book Theorem* kunnen we hieruit dan concluderen dat de correlaties van elk toevalsproces dat veroorzaakt wordt door onwetendheid voldoen aan de ongelijkheden van Bell. Met de details ga je nu aan de slag!

2. Let op! Stelling 6.1 geldt niet in de omgekeerde richting: er kunnen best zuivere toevalsprocessen bestaan die worden beschreven door een kansfunctie op een gebeurtenisruimte.

7

Afleiding van de Bell-ongelijkheid

In het vorige hoofdstuk heb je geleerd dat een kansfunctie per definitie aan bepaalde eigenschappen moet voldoen. Je gaat in dit hoofdstuk zelf bewijzen dat deze eigenschappen leiden tot de Bell-ongelijkheid voor drie vragen. Dit is een erg belangrijk resultaat. We beginnen dit hoofdstuk dan ook met een overzicht van de plaats die dit resultaat in ons project heeft. Daarna leggen we uit wat precies bedoeld wordt met de uitspraak dat correlaties van een kansexperiment aan de Bell-ongelijkheden voldoen. Tenslotte ga je zelf aan de slag. Aan de hand van opgaven laat je zien dat de eigenschappen van een kansfunctie leiden tot de Bell-ongelijkheid voor drie vragen. Je generaliseert daarmee de eerder gegeven afleiding in Hoofdstuk 4. Daarna geef je een soortgelijke afleiding van de Bell-ongelijkheid voor vier vragen.

Waar willen we heen?
We hebben al aangekondigd dat het uiteindelijke doel van de eerste helft van dit project de afleiding van de bewering (3.1) uit hoofdstuk 3 is. Voor het gemak schrijven we deze bewering nog een keer op:

Als toeval komt door onwetendheid, ***dan*** voldoen de correlaties aan de Bell-ongelijkheden. (7.1)

In hoofdstuk 3 hebben we laten zien hoe uit deze bewering het bestaan van zuiver toeval volgt. Blader nog eens terug naar dit hoofdstuk als je niet meer precies weet hoe dat ging.
Bovenstaande bewering (7.1) is van de vorm $A \Rightarrow B$, waarbij we met de letters A en B de volgende uitspraken bedoelen:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Toeval komt door onwetendheid.} \\
B &= \text{De bijbehorende correlaties voldoen aan de Bell-ongelijkheden.}
\end{aligned}
$$

De uitspraak B leggen we zo dadelijk uit. Het bewijs van (7.1) verloopt in twee stappen, waarvan je slechts de tweede stap in dit hoofstuk daadwerkelijk zal bewijzen. Eerst gaan we kijken uit welke twee stappen het bewijs is opgebouwd. We definiëren daarvoor een nieuwe uitspraak K:

$$K = \text{De kansen in een toevalsproces worden gegeven door een kansfunctie.}$$

In Hoofdstuk 6 hebben we gezien dat een kansfunctie ***per definitie*** drie eigenschappen heeft. Deze eigenschappen zitten in zekere zin 'opgesloten' in het begrip kansfunctie: wanneer je te maken hebt met een kansfunctie voldoet deze altijd aan de drie eigenschappen uit Definitie 6.1. Je zal deze eigenschappen straks moeten gebruiken om te laten zien dat de correlaties van kansen gegeven door een kansfunctie aan de Bell-ongelijkheden voldoen. Maar we lopen op de zaken vooruit, want dit is pas de tweede stap in het bewijs van bewering (7.1).

De eerste stap van het bewijs van (7.1) is de bewering $A \Rightarrow K$. In woorden:

Als toeval komt door onwetendheid, ***dan*** worden de kansen in dit toevalsproces gegeven door een kansfunctie.

Blader je nog eens terug naar het vorige hoofdstuk, dan zie je dat dit precies de inhoud van het *Dutch Book Theorem* is. Het bewijs van deze stelling is één van de keuze-onderwerpen in dit project.

De tweede stap in het bewijs van (7.1) is de bewering $K \Rightarrow B$. In woorden:

> ***Als*** de kansen in een toevalsproces gegeven worden door een kansfunctie, ***dan*** voldoen de bijbehorende correlaties aan de Bell-ongelijkheden.

Het bewijs van bovenstaande uitspraak is het onderwerp van het huidige hoofdstuk. Merk op dat wanneer we weten dat de beweringen $A \Rightarrow K$ en $K \Rightarrow B$ beide juist zijn, we mogen concluderen dat ook $A \Rightarrow B$ juist is. De twee stappen uit het bewijs leveren dus precies bewering (7.1) op. De rest van dit hoofdstuk zullen we ons bezig houden met de tweede stap van het bewijs: de uitspraak $K \Rightarrow B$.[1]

Wat zijn 'de' Bell-ongelijkheden van een toevalsproces?
Dit is misschien een goed moment om precies aan te geven wat we bedoelen met *'de bijbehorende correlaties voldoen aan de Bell-ongelijkheden'*. Tot nu toe zijn we slechts de Bell-ongelijkheid (4.7) tegengekomen die hoort bij een toevalsproces dat is geformuleerd door middel van drie ja/nee vragen. Voor een kansexperiment met vier ja/nee vragen luidt de Bell-ongelijkheid als volgt:

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq D) + P(B \neq C) + P(B \neq D). \tag{7.2}$$

Er bestaan ook Bell-ongelijkheden voor vijf of meer ja/nee vragen, die alsmaar ingewikkelder worden naarmate het aantal vragen toeneemt. In ons project zullen we gelukkig alleen de Bell-ongelijkheden voor drie en vier vragen tegenkomen.
Hoe dan ook, om de Bell-ongelijkheden behorend bij een toevalsproces op te schrijven moet dit proces al in de vorm van een eindig aantal ja/nee vragen zijn geformuleerd. Bij de enquête in hoofdstuk 4 was dat al vanaf het begin het geval, en ook de natuurkundige experimenten die je later in dit project tegenkomt zijn zo geformuleerd. Maar ook als een toevalsproces (met een eindige uitkomstruimte) er in eerste instantie niet zo uitziet, is het toch te herformuleren in termen van een eindig aantal ja/nee vragen. Deze herformulering kan vanwege de complexiteit van de Bell-ongelijkheden voor een groot aantal vragen het beste zo worden gekozen dat het aantal ja/nee vragen zo klein mogelijk is.[2] Heb je een toevalsproces eenmaal zo geformuleerd, dan kun je de bijbehorende correlaties uitrekenen en kijken of deze aan de Bell-ongelijkheid voor n vragen voldoen.

Zoals in de inleiding al aangekondigd ga je zelf de uitspraak $K \Rightarrow B$ bewijzen voor het geval van drie vragen. In dit geval betekent de uitspraak $K \Rightarrow B$ het volgende:

Stelling 7.1 *Als de kansen op de mogelijke gebeurtenissen in een toevalsproces met drie ja/nee vragen A, B en C worden gegeven door een kansfunctie,* ***dan*** *voldoen de bijbehorende correlaties aan de Bell-ongelijkheid voor drie vragen.*

Deze stelling is van de vorm: '***als*** ..., ***dan*** ...'. Het bewijs van een dergelijke stelling gaat als volgt: je neemt aan dat de uitspraak die na het woord '*als*' komt geldt. Je moet vervolgens laten zien dat onder deze aanname de uitspraak na het woord '*dan*' onontkoombaar is. Ga dus goed na wat je mag aannemen als je Stelling 7.1 wilt bewijzen en van welke conclusie je wilt laten zien dat deze onontkoombaar is onder deze aanname.

---

1. We beperken ons hier tot de situatie waarin alle onderdelen van het kansexperiment tegelijk uitvoerbaar zijn. In het geval van ja/nee vragen betekent dit dat alle vragen gelijktijdig gesteld en beantwoord kunnen worden. Zoals aangekondigd in hoofdstuk 3 is in de kwantumtheorie niet altijd aan deze aanname voldaan. Deze complicatie heeft geen invloed op de logische structuur van onze argument, maar wel op het onderdeel $K \Rightarrow B$ van het bewijs van (7.1). Het algemene bewijs van $K \Rightarrow B$ onder de aanname dat niets zich sneller voortplant dan het licht is een keuzeonderwerp. Daar zal ook uit blijken wat dan nog met een kansfunctie wordt bedoeld.
2. Als een kansexperiment de uitkomstruimte $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ heeft, dan kunnen we dit herformuleren in de volgende n vragen die alle met ja of nee kunnen worden beantwoord: 'Is de uitkomst x_1?', 'Is de uitkomst x_2?', ..., 'Is de uitkomst x_n?'. Dit argument geeft aan dat de bewuste herformulering in principe altijd mogelijk is. Als je deze constructie echter toepast op de enquête met drie vragen ben je verkeerd bezig. Want dan krijg je een herformulering in termen van acht vragen met een enorm ingewikkelde bijbehorende Bell-ongelijkheid, terwijl je in de oorspronkelijk formulering maar drie vragen had met de simpele ongelijkheid (4.7). In principe is hier geen verschil tussen, want de implicatie (7.1) geldt voor iedere mogelijke formulering van een toevalsproces in een eindig aantal ja/nee vragen. Maar in de praktijk moet je altijd proberen het aantal vragen zo klein mogelijk houden.
Wat we met dat laatste bedoelen kan worden geïllustreerd met het bekende spelletje *Wat zeg je van mijn vriend?* Je neemt iemand in gedachten, en de medespeler moet raden wie dat is. Hij of zij mag daarbij alleen maar ja/nee vragen stellen. In principe zou je een lijst kunnen maken van alle mensen die ooit geleefd hebben en bij iedereen vragen of die het is. Je mag echter maar drie keer vragen of het een concrete persoon is! Daarom moet je je vragen slim kiezen, zoals "is het een hij?", en zo ja: "heeft hij de differentiaalrekening uitgevonden?", enzovoort. Pas als het antwoord op de vorige vraag bevestigend is, is het verstandig om te vragen: "is het Newton?".

Nu je precies weet wat Stelling 7.1 inhoudt, ga je deze stelling bewijzen met behulp van de kennis over gebeurtenissen en kansfuncties die je hebt opgedaan in het vorige hoofdstuk.

Opgave 7.1

a) Geef de uitkomstruimte voor een kansexperiment met drie ja/nee vragen.

b) In de vergelijking komen drie gebeurtenissen voor met betrekking tot deze uitkomstruimte, te weten $A \neq C, A \neq B$ en $B \neq C$. Geef voor elk van deze gebeurtenissen aan met welk gedeelte van de uitkomstruimte deze gebeurtenis correspondeert.

c) Herschrijf de ongelijkheid $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$ door voor de gebeurtenissen de corresponderende gedeelten van de uitkomstruimte in te vullen.

d) Gebruik nu je aanname (P is een kansfunctie) om deze ongelijkheid verder uit te werken. Je zult hiervoor één of meerdere eigenschappen van een kansfunctie moeten gebruiken! Schrijf bij de uitwerking op welke eigenschappen van een kansfunctie je gebruikt.

e) Welke ongelijkheid hou je over? Is deze ongelijkheid altijd juist? Waarom?

Als het goed is heb je Stelling 7.1 nu bewezen! Misschien vraag je je af wat het verband is tussen het bewijs dat je net hebt gegeven en Opgave 4.4 in hoofdstuk 4? Dit verband wordt uitgelegd in de volgende opgave.

Opgave 7.2

Je hebt in hoofdstuk 4 uit Tabel 4.1 of je eigen tabel uitdrukkingen van de vorm n_{+++}/N enzovoort berekend. Definieer nu net als in je antwoord op de eerste opgave in Hoofdstuk 6 de getallen

$$P(+++) = n_{+++}/N, \tag{7.3}$$

enzovoort.

a) Je hebt in onderdeel a) van de vorige opgave de ruimte van uitkomsten van een kansexperiment met drie ja/nee vragen opgeschreven. Ga na dat de getallen $P(+++)$ tot en met $P(---)$ die via (7.3) uit een tabel volgen een kansverdeling op deze ruimte definiëren. (Met andere woorden, ga na dat de regels 1 en 2 voor een kansverdeling uit Hoofdstuk 6 gelden.)

b) Ga terug naar Opgave 4.4 in hoofdstuk 4. Als je die zonder berekening hebt weten te maken is dat knap, maar in dat geval word je nu voor je slimheid gestraft: je moet de opgave nog een keer doen met behulp van de concrete methode die daar staat uitgelegd. Doe dat zonodig eerst.

c) Houd de berekening van het vorige onderdeel naast je bewijs van Stelling 7.1 en leg uit waarom de berekening een speciaal geval van het bewijs is.

Stelling over de Bell-ongelijkheden voor vier vragen

In de natuurkunde is ook het geval van vier vragen belangrijk, omdat daar de schendingen het meest overtuigend zijn gemeten. Net als Stelling 7.1 geldt:

Stelling 7.2 *Als de kansen op de mogelijke gebeurtenissen in een toevalsproces met vier ja/nee vragen A, B, C en D worden gegeven door een kansfunctie op de gebeurtenisruimte,* ***dan*** *voldoen de bijbehorende correlaties aan de Bell-ongelijkheid* (7.2) *voor vier vragen.*

Let op! Hoewel de Bell-ongelijkheden voor drie en vier vragen veel op elkaar lijken, is er een belangrijk verschil tussen. In de Bell-ongelijkheid voor drie vragen komen alle combinaties AC, AB en BC voor. In de Bell-ongelijkheid voor vier vragen daarentegen staan A en B altijd in combinatie met C en D; kansen als $P(A \neq B)$ en $P(C \neq D)$ komen er niet in voor. We zullen daar later de diepere betekenis van zien. Het bewijs is echter vrijwel hetzelfde.

Opgave 7.3

Beantwoord de vragen uit opgave 7.2 voor vier in plaats van drie vragen en bewijs zo Stelling 7.2.

8

De wiskunde van de kwantummechanica

In dit hoofdstuk maak je kennis met de wiskundige begrippen waarin de kwantummechanica geformuleerd is. We bekijken de rekenregels en eigenschappen van vectoren in het platte vlak. Daarnaast introduceren we het inproduct tussen twee vectoren. In de twee volgende hoofdstukken zul je zien op welke manier je deze wiskundige begrippen terugvindt in de kwantummechanica.

De definitieve wiskundige formulering van de kwantumtheorie, waarvan de theorie die nu volgt een sterk vereenvoudigde versie is, is afkomstig van Von Neumann en Dirac (zie hoofdstuk 2). Deze formulering is gebaseerd op de begrippen *vector* en *inproduct*.

Vectoren
Zoals je misschien weet wordt het platte vlak in de wiskunde ook wel $\mathbb{R}^2$ genoemd. De reden hiervoor is dat een punt in dit vlak kan worden aangeduid met twee reële getallen. Deze getallen zijn bepaald ten opzichte van een willekeurig gekozen punt $(0, 0)$ dat we ook wel de *oorsprong* noemen. Ieder punt (v_1, v_2) dat niet gelijk is aan de oorspong bepaalt een pijl van het punt $(0, 0)$ naar het punt (v_1, v_2). Een derlijke pijl noemen we een *vector*. Om de vector (v_1, v_2) niet te verwarren met het punt (v_1, v_2) noteren we een vector meestal met $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ of $\vec{v}$. Het pijltje boven de letter v geeft aan dat een vector een *richting* heeft en dus niet hetzelfde is als het punt (v_1, v_2).

Voorbeeld: De vector $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ is een pijl van het punt $(0, 0)$ naar het punt $(3, 4)$.

Een vector heeft naast een richting (de richting waarin de pijl wijst) ook een *lengte*, namelijk de lengte van de pijl. Deze kun je eenvoudig bepalen met de stelling van Pythagoras. De lengte van een vector $\vec{v}$ geven we aan met $\|\vec{v}\|$. We krijgen zo de formule:

$$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{8.1}$$

Opgave 8.1

Teken drie verschillende vectoren in een plaatje en bepaal van elke vector de lengte.

Rekenen met vectoren
Je kunt twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ optellen volgens:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

In een plaatje betekent dit dat je de 'staart' van de ene vector achter de 'punt' van de andere vector plaatst. Het maakt niet uit in welke volgorde je vectoren optelt. Met andere woorden:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}. \tag{8.3}$$

Je kunt een vector $\vec{v}$ ook met een getal t vermenigvuldigen. Er geldt per definitie:

$$t \cdot \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Als je nu de relatie (8.2) en (8.4) gebruikt, zie je onmiddellijk in dat

$$t \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = t \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}. \tag{8.5}$$

We zullen het symbool $\cdot$ vaak weglaten, zodat (8.5) eenvoudigweg luidt $t(\vec{v} + \vec{w}) = t\vec{v} + t\vec{w}$.

In de volgende opgaven zie je welke meetkundige 'betekenis' optellen en vermenigvuldigen van vectoren hebben.

Opgave 8.2

Zij $\vec{v} = \binom{1}{2}$ en $\vec{w} = \binom{4}{1}$.

a) Bereken $\vec{v} + \vec{w}$.
b) Teken de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ in een plaatje.
c) Teken met behulp van de 'kop-staart-methode' de vector $\vec{v} + \vec{w}$.
d) Controleer of de getekende vector inderdaad overeenkomt met je antwoord bij onderdeel a.

Opgave 8.3

Zij $\vec{v} = \binom{3}{2}$.

a) Bereken $3\vec{v}$.
b) Teken de vectoren $\vec{v}$ en $3\vec{v}$ in een plaatje.
c) Wat is er met de lengte van de vector $\vec{v}$ gebeurd toen je deze met 3 vermenigvuldigde? En met de richting?
d) Bereken $-2\vec{v}$.
e) Teken ook deze vector in het plaatje.
f) Wat is er nu met de lengte en richting van de vector $\vec{v}$ gebeurd?

Opgave 8.4

We bekijken nu het algemene geval. Zij $\vec{v}$ de vector $\binom{v_1}{v_2}$.

a) Druk de lengte van $\vec{v}$ uit in v_1 en v_2.
b) We hebben gezien dat $t\vec{v} = \binom{tv_1}{tv_2}$. Druk de lengte van de vector $t\vec{v}$ uit in t, v_1 en v_2.
c) Wat gebeurt er in het algemeen met de lengte als je een vector met een getal t vermenigvuldigd?
d) En wat gebeurt er met de richting? (Hint: maak onderscheid tussen positieve en negatieve waarden van t.)

De tegengestelde van een vector
Bij ieder vector $\vec{v}$ hoort een vector $-\vec{v}$. Deze vector heeft dezelfde lengte als $\vec{v}$ maar precies de tegengestelde richting. Uit de vorige opgave blijkt dus dat dit precies de vector is die je krijgt als je $\vec{v}$ met -1 vermenigvuldigt. Het zal je niet verbazen dat geldt:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}. \tag{8.6}$$

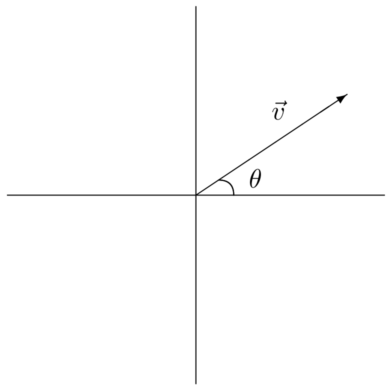
Let op: de $\vec{0}$ in het rechterlid is niet het *getal* 0 is maar de *vector* $\binom{0}{0}$. Immers, wanneer je twee vectoren optelt is de uitkomst weer een vector. Zo ook bij de vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal.

Vectoren voldoen dus aan een aantal belangrijke eigenschappen:

1. We kunnen vectoren optellen, zie (8.2).
2. Als we vectoren optellen is de volgorde niet van belang, zie (8.3).
3. We kunnen vectoren vermenigvuldigen met een getal t, zie (8.4).
4. Tot slot heeft elke vector heeft een tegengestelde, zie (8.6).

Deze eigenschappen worden in de wiskunde als basis genomen voor het begrip vector.

Vectoren op een andere manier bekeken
We hebben aan het begin van dit hoofdstuk gezien dat een vector een pijl is vanuit de oorsprong naar een bepaald punt in het platte vlak. Een dergelijke pijl wordt geheel vastgelegd door de *lengte* en de *richting* van de pijl. De lengte van een vector is een getal $t \geq 0$. De richting van een vector kunnen we uitdrukken in de hoek θ die de vector met de positieve horizontale as maakt. Er geldt $0 \leq \theta < 2\pi$.



Figuur 8.1: Een vector met hoek θ.

Enerzijds kunnen we gegeven een vector $\binom{v_1}{v_2}$ de bijbehorende lengte t en hoek θ uitrekenen. Anderzijds kunnen we gegeven een getal $t \geq 0$ en een hoek θ de bijbehorende vector $\binom{v_1}{v_2}$ uitrekenen. Wat is het verband tussen deze notaties?

Opgave 8.5

a) Zij $\vec{v}$ de vector met lengte 4 en hoek $\frac{1}{3}\pi$. Zij $\vec{w}$ de vector met lengte 3 en hoek $\frac{3}{4}\pi$. Teken de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.
b) Bereken v_1, v_2, w_1 en w_2 zodat $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ en $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$.
c) Nu omgekeerd. Stel $\vec{v} = \binom{3}{2}$ en bereken t en θ.

Je zult nu het algemene geval begrijpen: gegeven t en θ bepaal je v_1 en v_2 door

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Omgekeerd vind je t en θ uit v_1 en v_2 door

$$t = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \|\vec{v}\|; \tag{8.8}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right). \tag{8.9}$$

Opgave 8.6

a) Laat uit je favoriete definitie van sinus en cosinus zien dat (8.7) juist is.
b) Los t en θ op uit (8.7) en bewijs zo (8.8) en (8.9).

Het inproduct
Voor de kwantumtheorie is het *inproduct* tussen twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ van groot belang. Het inproduct van twee vectoren wordt genoteerd met $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ en is als volgt gedefinieerd:

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2. \tag{8.10}$$

Let op: het inproduct van twee vectoren is zelf geen vector maar gewoon een getal.

Opgave 8.7

Bekijk de vectoren $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ en $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Bereken $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ en $\langle\vec{w},\vec{v}\rangle$. Laat zien dat $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\vec{w},\vec{v}\rangle$.

b) Bereken $\langle\vec{u},\vec{v}+\vec{w}\rangle$, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ en $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$. Laat zien dat $\langle\vec{u},\vec{v}+\vec{w}\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{u},\vec{w}\rangle$.

c) Zij t een getal. Bereken $\langle t\vec{v},\vec{w}\rangle$ en $t\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$. Laat zien dat $\langle t\vec{v},\vec{w}\rangle = t\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$.

Opgave 8.8

We kunnen ook het inproduct van een vector $\vec{v}$ met zichzelf bekijken.

a) Zij $\vec{v}$ de vector $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$. Bereken de lengte van $\vec{v}$.

b) Bereken $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$. Wat valt je op?

In de voorgaande opgaven heb je gezien dat uit de definitie van het inproduct direct een aantal rekenregels volgen. Omdat je deze regels verderop nogal eens zal moeten gebruiken zetten we ze nog even op een rijtje:

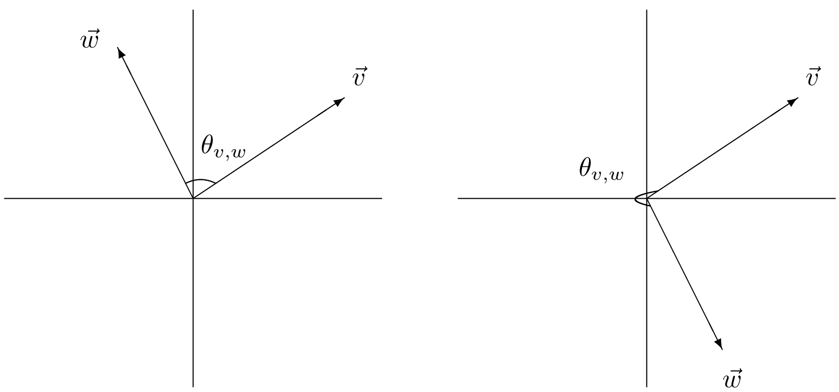
$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\vec{w},\vec{v}\rangle; \tag{8.11}$$
$$\langle\vec{u},\vec{v}+\vec{w}\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{u},\vec{w}\rangle; \tag{8.12}$$
$$\langle t\vec{v},\vec{w}\rangle = t\langle\vec{v},\vec{w}\rangle; \tag{8.13}$$
$$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \|\vec{v}\|^2 . \tag{8.14}$$

Opgave 8.9

Laat met behulp van bovenstaande rekenrekels zien dat

$$\langle\vec{u},t\vec{v}+\vec{w}\rangle = t\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{u},\vec{w}\rangle. \tag{8.15}$$

Geef bij elke stap precies aan welke van bovenstaande regels je gebuikt.



Figuur 8.2: De hoek tussen twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

De hoek tussen twee vectoren
Gegeven twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ kunnen we de hoek $\theta_{v,w}$ tussen deze vectoren bekijken. Wat er met de hoek tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ bedoeld wordt, wordt duidelijk in figuur 8.

Opgave 8.10

Stel $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn vectoren met hoeken θ_v en θ_w. Wat is de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{w}$?
(Let op: $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn twee *willekeurige* vectoren. Je weet dus niet of $\theta_v \leq \theta_w$ of dat $\theta_v > \theta_w$.)

De relatie tussen het inproduct van twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en de hoek tussen deze vectoren wordt gegeven door

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta_{v,w}. \tag{8.16}$$

Hierbij is $\theta_{v,w}$ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{w}$. We zagen eerder al dat $\|\vec{v}\|$ de lengte van $\vec{v}$ is.
In de formules (8.7) en (8.8) heb je gezien hoe je een vector $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ kunt uitdrukken in de lengte $\|\vec{v}\|$ en de hoek θ van deze vector. Hiermee kun je de gelijkheid (8.16) eenvoudig bewijzen.

Opgave 8.11

Stel $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn twee willekeurige vectoren met hoeken θ_v en θ_w.
a) Druk $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ en $\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$ uit in $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, θ_v en θ_w.
b) Gebruik deze uitdrukkingen en (8.10) om $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ om te schrijven in $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, θ_v en θ_w.
c) Laat door een berekening zien dat de uitdrukking bij onderdeel b gelijk is aan $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta_{v,w}$. Hiermee heb je (8.16) bewezen.

Eenheidsvectoren
Vectoren van lengte 1 hangen slechts af van de hoek θ die ze maken met de positieve horizontale as (want wegens (8.8) is $t = 1$ in (8.7)). In dat geval is de formule (8.16) bijzonder eenvoudig. Er komt namelijk te staan:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \cos \theta_{v,w}. \tag{8.17}$$

Zoals we zullen zien speelt deze formule in de kwantumtheorie een sleutelrol.

Hogere dimensie
Tot nu toe hebben we slechts vectoren van dimensie 2 bekeken. Zetten we het plaatje van $\mathbb{R}^2$ uit ons hoofd, dan kunnen we echter ook vectoren van hogere dimensies bekijken. Dimensie 3 is je natuurlijk welbekend: een vector ziet er dan uit als $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$. Al kun je je het niet meer voorstellen, wiskundig gesproken is het geen enkel probleem vectoren in een willekeurige dimensie n te definiëren. Alle in dit hoofdstuk genoemde eigenschappen waarin $\vec{v}$ en $\vec{w}$ voorkomen zijn letterlijk geldig in dimensie n.
Hierbij moeten we opmerken dat ook in dimensie $n > 2$ de hoek $\theta_{v,w}$ nog steeds is gedefinieerd zoals in Figuur 8, omdat de twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ samen in een plat vlak liggen. De hoek 'leeft' helemaal in dat vlak en formule (8.16) geldt dan nog steeds.
Ook alle andere eigenschappen die zijn opgeschreven in termen van $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ en $\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$ kunnen moeiteloos tot hogere dimensies worden uitgebreid. Zo wordt eigenschap (8.2) in dimensie n:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Opgave 8.12

Schrijf ook de formules (8.1), (8.4) en (8.10) op in willekeurige dimensie.

Al leven we zelf in dimensie 3, de wiskunde van de kwantumtheorie maakt gebruik van vectoren in alle mogelijke dimensies (inclusief oneindig!). Dit is een mooi voorbeeld van het gebruik van abstracte wiskunde in concrete natuurkunde.

9

Fotonen en polarisatie

In dit hoofdstuk geven we een inleiding op de kwantumtheorie van gepolariseerd licht. Hiermee kun je bijvoorbeeld een alledaags gebruiksvoorwerp als een polaroidbril begrijpen. Het uiteindelijke doel is om de natuurkundige kennis van dit hoofdstuk te combineren met de wiskunde van het platte vlak uit het vorige hoofdstuk. Daarmee kun je dan een toevalsproces doorekenen waarin een Bell-ongelijkheid wordt geschonden. We hebben in het eerste deel van dit project bewezen dat een dergelijk toevalspoces gebaseerd moet zijn op zuiver toeval. De berekening zelf geef je in het volgende hoofdstuk.

We gaan nog eens terug naar hoofdstuk 1, waarin we als voorbeeld van een toevalsproces de weerkaatsing van licht hebben besproken. Een ruit laat een gedeelte van het invallende licht door, terwijl de rest van het licht wordt weerkaatst (of geabsorbeerd). Het is de bedoeling van een goede ruit in een huis dat zo veel mogelijk licht wordt doorgelaten. Bij een zonnebril ligt dat anders: daar wordt een veel groter deel van het licht weerkaatst of geabsorbeerd.
Een speciaal soort zonnebril heeft ***polaroid*** glazen. Hierbij wordt ongeveer de helft van het invallende licht doorgelaten en de andere helft geabsorbeerd (en dan in warmte omgezet). Dit gebeurt op een speciale manier, waarbij er controle is over het soort licht dat (niet) wordt doorgelaten.

Opgave 9.1

> Zoek op het internet, in een natuurkundeboek of in een encyclopedie op hoe een polaroidbril werkt en geef hier een samenvatting van.

Bij je research voor deze opgave zul je het begrip ***polarisatie van licht*** tegen zijn gekomen. Dit begrip bestond al in de klassieke natuurkunde: Netwon en Huygens waren er in de zeventiende eeuw zelfs mee vertrouwd. Maar om het verband tussen polaroidglazen en de Bell-ongelijkheden te begrijpen moet je iets weten over de *kwantumtheorie* van gepolariseerd licht. Dit lijkt misschien wat veel gevraagd, omdat je vermoedelijk niet of nauwelijks weet wat kwantummechanica überhaupt is en nu bang bent dat je eerst deze hele theorie moet leren om die vervolgens dan nog eens toe te passen op licht.
Maar het is omgekeerd: we gaan je een aantal basisprincipes van de kwantumtheorie uitleggen aan de hand van het voorbeeld van gepolariseerd licht! Dit blijkt namelijk een van de allereenvoudigste kwantumsystemen te zijn. De daarvoor benodigde wiskunde heb je net achter de kiezen.

Fotonen
Vergelijk water dat uit een tuinslang spuit eens met licht dat uit een laserpointer (of uit een lasergun in de laserdisco) straalt. In beide gevallen kun je spreken van een duidelijke straal die zich in een bepaalde richting beweegt. Van water weet je dat het uiteindelijk uit kleine deeltjes, watermoleculen, bestaat. In 1905 stelde Albert Einstein voor dat ook licht uiteindelijk is opgebouwd uit kleine deeltjes, genaamd ***fotonen***. Een foton wordt ook wel een ***lichtkwantum*** genoemd, omdat het ondeelbaar is: je kunt niet zo iets hebben als

een half foton. Als een foton dus op een ruit of polaroidglas vliegt wordt het ófwel als geheel doorgelaten, ófwel als geheel geabsorbeerd of weerkaatst.

Opgave 9.2

We hebben zojuist gezegd dat een polaroidbril de helft van het invallende licht doorlaat (en de andere helft absorbeert). Wat zou dit kunnen betekenen voor één enkel foton?

Transversale trillingen

De werking van een polaroidbril berust op het feit dat een foton niet zomaar een deeltje zonder verdere structuur is. Behalve zich voortbewegen met de lichtsnelheid (van 300.000 km/s) kan het ook nog trillen in het vlak dat loodrecht op de bewegingsrichting staat. Een dergelijke trilling heet ***transversaal***. Het meest aansprekende voorbeeld van een transversale trilling is de zogenaamde *wave* of *holà* die toeschouwers in stadions soms produceren. De *wave* plant zich van links naar rechts of andersom voort, terwijl de individuele fan opstaat en weer gaat zitten, en dus verticaal trilt. De trillingsrichting staat dus inderdaad loodrecht op de voortplantingsrichting van de golf.

Opgave 9.3

Bedenk nog twee of drie voorbeelden van transversale trillingen.

Anders dan een toeschouwer in het stadion die met de *wave* meedoet en helemaal of een beetje kan opstaan of iets daar tussenin, is de amplitude van de trilling van een foton geheel vastgelegd door de aard van het foton. Het enige dat het foton als het ware kan kiezen is de richting van de trilling, zolang deze maar loodrecht op de bewegingsrichting staat.
Als we op een vaste tijd kijken (en de beweging van het foton dus 'bevriezen'), bijvoorbeeld het tijdstip waarop het foton tegen het glas botst, dan is de toestand waarin het foton zich bevindt dus geheel vastgelegd door zijn trillingsrichting.
We nemen voor het gemak aan dat het foton langs de y-as beweegt. Omdat de trillingsrichting loodrecht op de bewegingsrichting staat, moet de trilling in het x-z vlak liggen. Stel dat de trillingsrichting een hoek ψ maakt met de x-as. We kunnen deze richting dan aangeven met de eenheidsvector

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}; \tag{9.1}$$

vergelijk deze uitdrukking met (8.7) in hoofdstuk 8. Het bovenstaande samenvattend, kunnen we zeggen dat de vector $\vec{\Psi}$ een volledige wiskundige weergave is van de toestand van het foton op het moment dat het tegen het polaroidglas botst (en de beweging dus bevroren is). Met andere woorden, de vector $\vec{\Psi}$ bevat alle mogelijke fysische informatie die op dat moment van belang is.

Toestand en kans in de kwantumtheorie

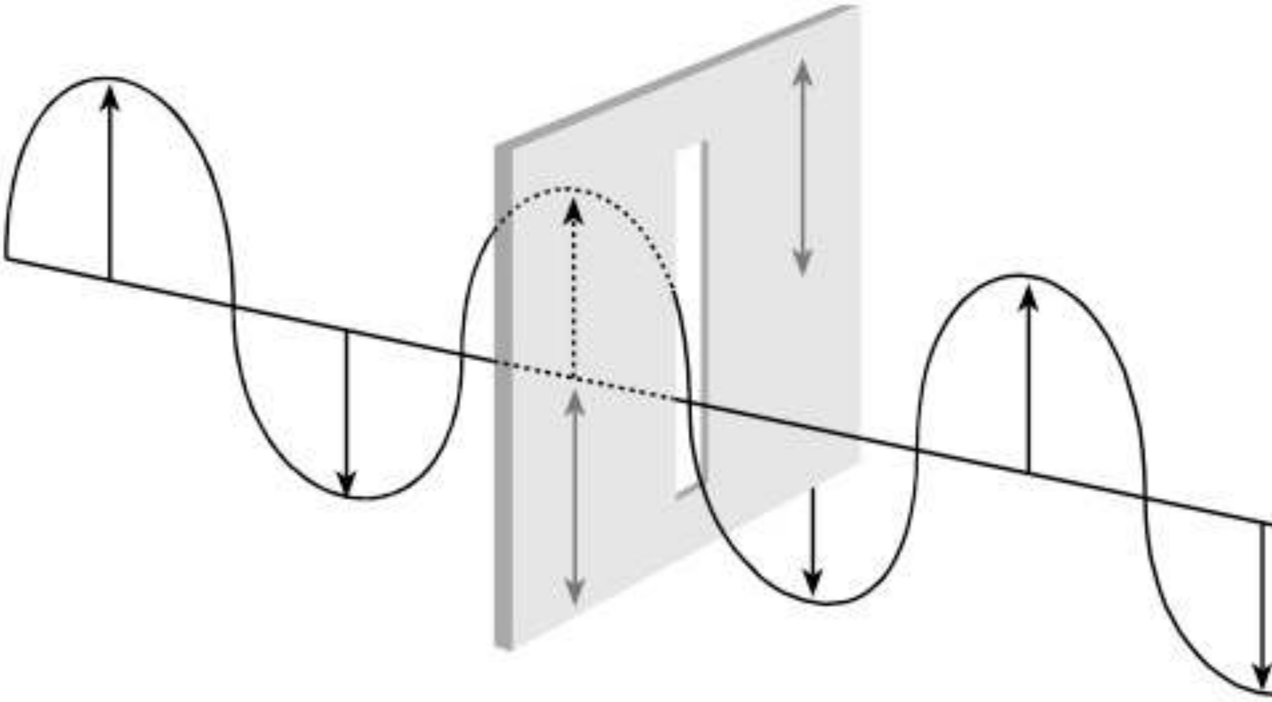
Wat kunnen we met deze informatie? Met andere woorden, wat betekent deze toestandsvector van het foton?

- In de klassieke natuurkunde van Newton bepaalt de toestand van een fysisch systeem de uitkomst van een experiment. Deze uitkomst kan in principe met zekerheid worden voorspeld.
- In de kwantumtheorie daarentegen geeft zelfs een perfecte kennis van de toestand slechts *kansen* op verschillende mogelijke uitkomsten. *Ieder* experiment wordt dus in principe als een toevalsproces beschouwd.

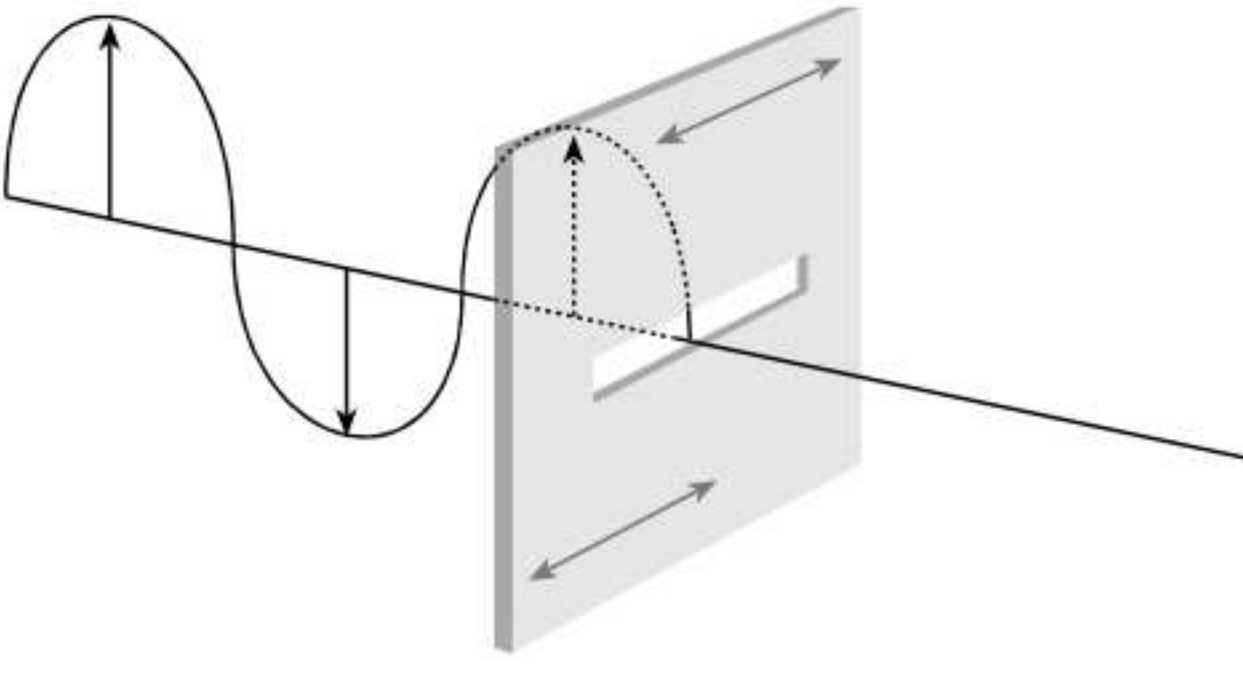
We hebben in het eerste deel van het project al verschillende toevalsprocessen geformuleerd in termen van ja/nee vragen, dus daar ben je al aan gewend. Ook het soort experiment waarbij fotonen op polaroidglazen botsen kan door middel van ja/nee vragen worden beschreven. De experimentator is als het ware een marktonderzoeker die het foton vragen stelt die het met ja of nee kan beantwoorden. We beperken ons in dit project tot zulke experimenten. De toestand van het foton waar de vragen aan worden gesteld bepaalt de kansen op de antwoorden "ja" en "nee". We gaan nu kijken wat voor soort vragen er tijdens een experiment aan een foton gesteld worden.

Wat zijn de vragen?

Je kunt normaal glas ronddraaien zonder de eigenschappen ervan te veranderen. Het blijkt echter dat een polaroidglas een voorkeursas heeft. Deze as heet de ***polarisatieas*** en heeft grote invloed op het foton.



Figuur 9.1: Foton dat precies langs de polarisatieas van het polaroidglas trilt wordt doorgelaten



Figuur 9.2: Foton dat loodrecht op de polarisatieas trilt wordt geabsorbeerd

- Als een invallend foton precies in de richting van deze as trilt wordt het zeker doorgelaten;
- Als het foton daarentegen loodrecht op de polarisatieas trilt wordt het met zekerheid geabsorbeerd.

Over de tussenliggende mogelijkheden komen we zo direct te spreken.

We hebben al opgemerkt dat polaroidglas een polarisatieas heeft. De hoek α die de polaristatieas met de x-as maakt heet de ***polarisatiehoek***. Op het bovenste plaatje op de vorige bladzijde maakt de polarisatieas een hoek van 90 graden met de x-as. Op het onderste plaatje loopt de polarisatieas evenwijdig aan de x-as en is de polarisatiehoek dus 0 graden. De vragen die we een foton stellen zijn afhankelijk van deze polarisatiehoek. We kunnen een gegeven foton bijvoorbeeld vragen:

Vraag A: word jij doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek α?

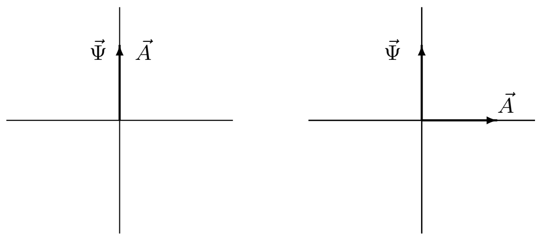
Vraag B: word jij doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek β?

Vraag C: word jij doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek γ?

Omdat een bepaalde polarisatiehoek beschreven kan worden door middel van een eenheidsvector in het x-z vlak kunnen we bovenstaande vragen wiskundig voorstellen met vectoren:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

Eerder zagen we al dat ook de toestand (dat wil zeggen de trillingsrichting) kan worden vastgelegd met behulp van een vector. De plaatjes van de vorige bladzijde kunnen we dus schematisch weergeven met twee eenheidsvectoren: een toestandsvector $\vec{\Psi}$ die de trillingsrichting van het foton aangeeft en de vector $\vec{A}$ die aangeeft op welke polarisatiehoek α vraag A betrekking heeft:



Figuur 9.3: Schematische weergave van een ja/nee vraag A aan een foton in toestand $\vec{\Psi}$.

In het bovenste plaatje op de vorige bladzijde is de trillingsrichting van het foton evenwijdig aan de polarisatieas van het polaroidglas. Hierdoor vallen in het linkerplaatje hierboven de vectoren $\vec{\Psi}$ en $\vec{A}$ samen.

Opgave 9.4

Stel de toestand van het foton is $\vec{\Psi}$, zoals gegeven in (9.1).

a) Teken een plaatje zoals boven in de tekst, maar nu met de hoeken α en ψ willekeurig. Wat is de hoek tussen de trillingsrichting van het foton en de polarisatieas van het polaroidglas?
b) Leid uit de voorgaande tekst af dat als $\alpha = \psi$ (of $\alpha = \psi \pm \pi$), het antwoord op vraag A "ja" is.
c) Wanneer is het antwoord op vraag A met zekerheid "nee"?
d) Geef soortgelijke regels voor de vragen B en C.

Wat zijn de antwoorden?
We weten nog niet wat het antwoord op de bovenstaande vragen is als het foton *niet* precies in de richting van de polarisatieas of loodrecht daarop trilt. De kwantumtheorie geeft een algemeen voorschrift om dergelijke vragen te beantwoorden. Niemand begrijpt waar dit voorschrift vandaan komt, maar het is voldoende om aan het rekenen te gaan. Het voorschrift gaat uit van het grondprincipe van de kwantumtheorie dat een toestand van een fysisch systeem altijd door een vector wordt gegeven (maar die hoeft niet noodzakelijk in het platte vlak te liggen, zoals bij een foton; integendeel!). Het voorschrift is als volgt.

1. Neem een ja/nee vraag A aan een fysisch systeem en vind alle toestanden van dit systeem waarin het antwoord op de vraag met zekerheid "ja" is. In het vervolg gaan we er vanuit dat dit (net als in het geval van het foton) slechts voor één toestand het geval is, die we $\vec{A}$ noemen.[1]
2. In een willekeurige toestand $\vec{\Psi}$ is het antwoord op vraag A in principe onvoorspelbaar. De kans dat het antwoord "ja" is, is gelijk aan het kwadraat van het inproduct tussen de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{\Psi}$, dus

$$P(A=+) = \langle \vec{A}, \vec{\Psi} \rangle^2. \tag{9.3}$$

3. Als bij de meting wordt vastgesteld dat het antwoord inderdaad "ja" is, is de toestand van het systeem onmiddellijk *na* de meting niet meer $\vec{\Psi}$ maar $\vec{A}$.

Er zijn drie belangrijke verschillen met de klassieke natuurkunde. Daarin:

- hoeft een toestand geen vector te zijn;
- kan de uitkomst van een experiment in principe met zekerheid worden voorspeld;
- verandert de toestand in het algemeen niet na een meting.

Toch is het derde voorschrift in ons voorbeeld van het foton goed te begrijpen: het betekent dat het doorgelaten foton de polarisatieas van het polaroidglas heeft overgenomen als zijn eigen trillingsrichting. Dat dit zo is ligt voor de hand uit de twee plaatjes boven: *als* een foton wordt doorgelaten, dan wordt het als het ware in het keurslijf van de polarisatieas van het polaroidglas geperst.

Opgave 9.5

Pas het bovenstaande voorschrift toe op het foton dat op een polaroidglas inslaat en laat met behulp van formule (8.17) uit hoofdstuk 8 zien dat de kans dat een foton in toestand $\vec{\Psi}$ wordt doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek α gelijk is aan

$$P(A=+) = \cos^2(\alpha - \psi). \tag{9.4}$$

1. Als er meer toestanden zijn waarin het antwoord op de vraag met zekerheid "ja" is, dan moet je daar een zo groot mogelijke familie $\{\vec{A}_i\}$ van kiezen die allemaal loodrecht op elkaar staan en daar in (9.3) over sommeren. Daar komt dan dus te staan: $P(A=+) = \sum_i \langle \vec{A}_i, \vec{\Psi} \rangle^2$.

10

EPR-correlaties

In dit hoofdstuk beginnen we met het bewijs dat de Bell-ongelijkheden in de natuur worden geschonden. We stuiten daarbij op een probleem waar we nog niet eerder bij stil hebben gestaan. Tot nu toe zijn we er namelijk stilzwijgend van uitgegaan dat het mogelijk is de ja/nee vragen in een kansexperiment alle naast elkaar te stellen en te laten beantwoorden. Maar misschien is het na het stellen van de eerste vraag A helemaal niet meer mogelijk om de tweede vraag B te stellen!
In dit hoofdstuk geven we aan hoe dit probleem opgelost kan worden met behulp van een tweetal 'verstrengelde' deeltjes. De correlaties tussen dergelijke deeltjes heten Einstein–Podolsky–Rosen correlaties (ofwel EPR-correlaties). Dit hoofdstuk gaat daarmee over een van de meest spectaculaire verschijnselen in de natuur(kunde).

Het bovenstaande klinkt je misschien wat vreemd in de oren als je aan kansexperimenten als een enquête op de markt denkt. In het voorbeeld van een foton dat op een polaroidglas botst komt iets dergelijks echter wel degelijk voor. Stel dat het foton eerst wordt gevraagd of het wordt doorgelaten door een polaroidglas met polarisatorhoek α (vraag A). Als het antwoord "ja" is kunnen we vervolgens ook vraag B stellen, namelijk of het ook wordt doorgelaten door een polaroidglas met polarisatorhoek β. Maar als het antwoord "nee" is (in welk geval het foton is geabsorbeerd), dan kunnen we het foton geen enkele vraag meer stellen omdat het niet meer bestaat!

Wat is precies het probleem?
In hoofdstuk 9 hebben we voor het eerst kennis gemaakt met experimenten op microscopische schaal. We zijn daarbij onder meer het volgende belangrijke verschil met de klassieke natuurkunde tegengekomen:

- In de kwantumfysica verandert de toestand in het algemeen na een meting.

We hebben inderdaad gezien dat de toestand van een foton verandert als we een meting aan dit foton verrichten: een foton dat wordt doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek α verruilt zijn oorspronkelijke trillingrichting voor een trilling in de richting van de polarisatiehoek α. Sterker nog, een foton dat *niet* wordt doorgelaten (en dus geabsorbeerd wordt) is omgezet in warmte en bestaat na de meting helemaal niet meer!

De verandering van toestand (en in sommige gevallen zelfs verdwijning) van een foton door het stellen van een vraag aan dit foton is precies de kern van het probleem dat we in de inleiding schetsten. Immers, als het foton na de eerste vraag A van toestand veranderd is, is het niet mogelijk om *hetzelfde* foton ook nog vraag B te stellen. En als het foton na vraag A zelfs verdwenen is, kunnen we het helemaal wel schudden met vraag B (om maar te zwijgen over vraag C). In de klassieke natuurkunde treedt dit probleem niet op, omdat metingen (oftewel vragen) de toestand van het systeem niet veranderen. We kunnen dan alle vragen die we maar willen achter elkaar stellen en het antwoord op de ene vraag hangt niet af van het feit of ook nog een andere vraag gesteld wordt.

In de kwantumwereld is dit blijkbaar niet het geval.[1] Het kunnen stellen van meerdere vragen is echter wel nodig om de schendig van de Bell-ongelijkheden:

$$\begin{aligned} P(A \neq C) &\leq P(A \neq B) + P(B \neq C); && (10.1) \\ P(A \neq C) &\leq P(A \neq D) + P(B \neq C) + P(B \neq D) && (10.2) \end{aligned}$$

aan te tonen. Kansen als $P(A \neq B)$ kunnen uiteraard alleen bepaald worden als we zowel vraag A als vraag B kunnen stellen. Het blijkt echter dat de kwantumwereld zelf met een oplossing komt voor dit probleem.

Gecorreleerde paren fotonen

In hoofdstuk 1 van Zeilingers boek *Toeval!* heb je als het goed is al het één en ander gelezen over verstrengelde deeltjes. Verstrengelde paren van fotonen hebben de merkwaardige eigenschap dat ze altijd hetzelfde antwoord als beide fotonen precies dezelfde vraag wordt gesteld. Zo'n paar van fotonen noemt men ook wel ***EPR-gecorreleerd***. De letters E, P en R komen van Einstein en twee van zijn medewerkers genaamd Podolsky en Rosen: in een beroemd artikel uit 1935 stelden zijn voor het eerst vast dat dergelijke correlaties in de kwantumtheorie mogelijk zijn. Dit is zelfs het geval als de twee fotonen miljarden lichtjaren van elkaar verwijderd zijn: het maakt niet uit wat hun onderlinge afstand is. In dat geval zou je geen correlaties verwachten, en dat maakt de EPR-correlaties zo spectaculair.[2]

Het bestaan van dergelijke perfect gecorreleerde fotonenparen biedt een uitkomst in ons probleem. Het is met behulp van deze paren fotonen namelijk toch mogelijk de antwoorden van een foton op zowel vraag A als vraag B te bepalen.
Dit gaat als volgt: We hebben een bron die paren van EPR-gecorreleerde fotonen uitzendt. Eén van de twee fotonen wordt naar links uitgezonden en de andere naar rechts. We stellen vraag A aan het linkerfoton en vraag B aan het rechterfoton. Op deze manier weten we van beide fotonen zowel het antwoord op vraag A als het antwoord op vraag B. Het antwoord van het linkerfoton op vraag B wordt, wegens de perfecte correlatie tussen het linker- en rechterfoton, immers vastgelegd door het antwoord van het rechterfoton op vraag B. Evenzo wordt het antwoord van het rechterfoton op vraag A bepaald door het linkerfoton.
In de Bell-ongelijkheden (10.1) en (10.2) komen uitsluitend correlaties voor van de vorm $P(A \neq B)$, waarin steeds twee vragen staan. Het is daarom voldoende als je steeds twee vragen naast elkaar kunt stellen: meer hoeft niet. En uit (10.2) zie je dat je soms niet eens alle mogelijke paren van vragen naast elkaar hoeft te kunnen stellen: in de Bell-ongelijkheid voor vier vragen komen bijvoorbeeld alleen de paren (A, C), (A, D), (B, C) en (B, D) voor.
Dit blijkt precies mogelijk te zijn met EPR-gecorreleerde paren van fotonen!

Experiment met twee fotonen

In het volgens hoofdstuk ga je wiskundig aantonen hoe de EPR-correlaties tot stand komen en hoe op die manier de Bell-ongelijkheden voor drie en vier vragen worden geschonden. Maar eerst gaan we gewoon eens kijken wat er is gemeten. Stel dat we de experimenten met het polaroidglas uit het vorige hoordstuk gaan uitvoeren met een paar fotonen in plaats van één enkel foton. Om te beginnen kunnen we opmerken dat we nu niet drie vragen hebben maar zes vragen. We kunnen namelijk zowel het linker- als het rechterfoton vraag A, B en C stellen. Het zal later duidelijk worden hoe we uiteindelijk toch op de Bell-ongelijkheid voor drie vragen terechtkomen.
Als vraag A aan het linkerfoton wordt gesteld noemen we haar A_L, als vraag A aan het rechterfoton wordt gesteld noemen we haar A_R, enzovoort. Met andere woorden:

Vraag A_L: wordt het linkerfoton doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek α?

Vraag A_R: wordt het rechterfoton doorgelaten door een polaroidglas met polarisatiehoek α?

De mogelijke vragen zijn dan: $A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R$.

Als de fotonen perfect EPR-gecorreleerd zijn komt er het volgende.

---

1. Het verschijnsel dat je in de kwantumwereld niet zomaar alle mogelijke vragen aan de natuur naast elkaar kunt stellen heeft te maken met de beroemde ***onzekerheidsrelaties van Heisenberg.***
2. Einstein beschouwde deze eigenschap van de kwantumtheorie als dermate absurd, dat hij alleen al om die reden niet in de theorie kon geloven. Tegenwoordig zien we de EPR-correlaties juist als een van de meest spectaculaire voorspellingen van de kwantumtheorie, aan de juistheid waarvan inmiddels vrijwel niemand meer twijfelt. De werking van kwantumcomputers, de dragers van de volgende technologische revolutie, is bijvoorbeeld gebaseerd op deze correlaties. Liefhebbers van de televisieserie *Star Trek* hebben waarschijnlijk de legendarische *Original Series* gezien (oorspronkelijk uitgezonden tussen 1966 en 1968). Daarin geeft Captain Kirk, de gezagvoerder van *U.S.S. Entreprise*, vele malen het bevel *Beam me up, Scotty!* Pas in 1993 werd ontdekt hoe dit in theorie ook echt zou kunnen. Scotty zou namelijk gebruik kunnen maken van *kwantumteleportatie*, een methode die is gebaseerd op EPR-correlaties. Kwantumteleportatie zijn in 1997 en daarna ook daadwerkelijk experimenteel uitgevoerd, zij het met zeer kleine systemen.

- **Meetresultaat 1:** *als we uitsluitend aan de linkerkant meten is de kans op de antwoorden "ja" en "nee" bij ieder van de drie vragen A_L, B_L, C_L gelijk aan $\frac{1}{2}$:*

$$P(A_L = +) = P(B_L = +) = P(C_L = +) = \tfrac{1}{2}; \quad (10.3)$$
$$P(A_L = -) = P(B_L = -) = P(C_L = -) = \tfrac{1}{2}. \quad (10.4)$$

Als we uitsluitend aan de rechterkant kijken geldt precies hetzelfde voor A_R, B_R, C_R:

$$P(A_R = +) = P(B_R = +) = P(C_R = +) = \tfrac{1}{2}; \quad (10.5)$$
$$P(A_R = -) = P(B_R = -) = P(C_R = -) = \tfrac{1}{2}. \quad (10.6)$$

- **Meetresultaat 2:** *als aan twee kanten, links en rechts dus, tegelijk metingen worden verricht, dan blijkt het volgende:*

$$P(A_L = + \, en \, A_R = +) = \tfrac{1}{2}; \quad (10.7)$$
$$P(A_L = - \, en \, A_R = -) = \tfrac{1}{2}; \quad (10.8)$$
$$P(A_L = + \, en \, A_R = -) = 0; \quad (10.9)$$
$$P(A_L = - \, en \, A_R = +) = 0, \quad (10.10)$$

en idem dito voor B en C i.p.v. A. Met name geldt dus:

$$P(A_L = A_R) = 1; \quad (10.11)$$
$$P(A_L \neq A_R) = 0. \quad (10.12)$$

Uit (10.3) tot en met (10.6) volgt dat we hier met een toevalsproces te maken hebben. Op het eerste gezicht lijkt het zo dat als je alleen links of rechts kijkt, er geen enkel verschil is met de experimenten in het vorige hoofdstuk. Maar in werkelijkheid blijkt er een enorm verschil te zijn:

- Een enkel foton dat niet EPR-gecorreleerd is met een partner *heeft een trillingsas* voor hij tegen het polaroidglas botst. De richting van deze as verandert weliswaar als hij wordt doorgelaten, maar vóór de meting is de trillingsas niettemin welbepaald.
- We zullen in de volgende twee hoofdstukken zien dat een EPR-gecorreleerd foton helemaal *geen trillingsas heeft* tot het moment dat hij of zijn partner tegen een polaroidglas botst.

Dit tweede punt is nu nog niet te begrijpen. Maar de resultaten (10.7) tot en met (10.12) zouden als een verrassing moeten komen.

Opgave 10.1

a) Leg uit dat de kansen (10.11) en (10.12) wiskundig uitdrukken wat eerder in woorden is gezegd over EPR-gecorreleerde fotonen.

b) Wat zou je in het rechterlid van (10.7) tot en met (10.12) verwachten als de toevalsprocessen links en rechts onafhankelijk zijn?

Als we er vanuit gaan dat de beide fotonen op grote afstand van elkaar niet direct met elkaar kunnen communiceren en de twee metingen links en rechts steeds precies tegelijk plaatsvinden, lijkt deze gang van zaken in eerste instantie zeer vreemd. Aan beide kanten vindt een toevalsproces plaats, maar deze twee processen zijn perfect op elkaar afgestemd. Dit is zelfs het geval als het linkerfoton kilometers van het rechterfoton verwijderd is (dit is gemeten op een afstand van 10 kilometer!).

11
Een eenvoudige verklaring?

In het vorige hoofdstuk heb je een verbazingwekkend verschijnsel gezien: EPR-correlaties. Na enig nadenken lijkt er echter een eenvoudige verklaring voor het experiment te bestaan. We leggen deze verklaring door twee voorbeelden uit. We beginnen met een eenvoudigere situatie, waarin links en rechts slechts één ja/nee vraag wordt gesteld. Vervolgens gaan we over tot een metafoor waarin links en rechts drie ja/nee vragen worden gesteld, net als bij de fotonen. Uiteindelijk zul je echter concluderen dat deze eenvoudige verklaring niet deugt!

Stel je hebt een grote vaas met even veel rode en blauwe ballen. Een leerling genaamd **M**aartje (die in het **M**idden staat) trekt steeds tegelijk twee ballen. Als die niet dezelfde kleur hebben gooit ze ze terug en trekt opnieuw. Zodra ze ófwel twee rode ballen ofwel twee blauwe ballen heeft, stuurt ze een van de twee ballen naar **L**inks en de andere naar **R**echts. Ver van haar vandaan staan links en rechts twee andere leerlingen, **L**eo en **R**ogier, die ieder de bewuste bal opvangen.
Deze actie wordt voortdurend herhaald. Voor Leo en Rogier is sprake van een toevalsproces: ze krijgen ongeveer de helft van de keren een rode bal, en de helft van de keren een blauwe. De kleuren bij Leo en Rogier zijn echter perfect gecorreleerd: blauw-blauw of rood-rood. Als vraag A nu betekent: "is de bal blauw?", dan zijn de correlaties tussen hun uitkomsten precies gelijk aan (10.7) tot en met (10.12).
Maar daar is niets mysterieus aan: de uitkomst ligt al vast zodra Maartje de ballen getrokken heeft, en is niet het gevolg van telepathie tussen Leo en Rogier. Het toeval dat zij waarnemen is het gevolg van het feit dat zij niet weten welke kleur Maartje trekt.

Het trekken van de ballen uit de vaas door Maartje is een voor Leo en Rogier onzichtbaar toevalsproces. (Het voor hen zichtbare kansexperiment is het ontvangen van de ballen.) Een soortgelijk scenario zou misschien het experiment met de twee fotonen kunnen verklaren: de uitkomsten van de metingen links en rechts worden bepaald oor een onzichtbaar toevalsproces en liggen dus al vast voordat de metingen worden verricht.
De begintoestand van het fotonpaar moet dan wel per keer veranderen om de kansen $\frac{1}{2}$ in (10.7) en (10.8) te verkrijgen, maar we hebben gezien dat iets dergelijks in het kansexperiment van Maartje, Leo en Rogier geen enkel probleem is. Het zou namelijk best kunnen dat een diepere theorie dan de kwantumtheorie net zo iets doet als het trekken van de ballen, dat dan de toestand van het fotonpaar oplevert. Leo en Rogier weten niet van tevoren welke kleur ballen Maartje trekt, maar de natuur weet dat wel. Dit was de opvatting van Einstein. Hij beschouwde de kwantummechanica dus als een onvolledige theorie.

James Bond
Om beter te begrijpen wat er aan de hand is geven we nu een ander voorbeeld dan dat van Maartje, Leo en Rogier, dat recht doet aan het feit dat aan elk van de fotonen niet één maar drie vragen kunnen worden gesteld. Twee geheime agenten, Leonard en Roger, worden door de Britse geheime dienst MI5 vanuit Londen naar twee ver uit elkaar gelegen landen uitgezonden, bijvoorbeeld Cuba en Noord-Korea. *Ter plaatse* (dus

niet in Londen) krijgen de agenten van een lokale man van MI5 één van drie mogelijke opdrachten:

A: vermoord de president;
B: vermoord de minister van defensie;
C: vermoord de opperbevelhebber van het leger.

Je moet je in het vervolg maar even voorstellen dat dit proces zich vele malen afspeelt.
De agenten slagen in de praktijk gemiddeld maar in de helft van dergelijke opdrachten. Ze hebben hun slaagkans echter wel zelf in de hand: als ze hun uiterste best doen slagen ze (met gevaar voor eigen leven, maar net als James Bond weten ze ook dan steeds te ontsnappen), als ze daarentegen ieder risico vermijden, dan mislukt de aanslag gegarandeerd.

Laat het nu zo zijn dat ze de opdracht altijd precies tegelijk krijgen en niet met elkaar kunnen communiceren; het mobiele netwerk in Cuba en Noord-Korea is beroerd, ze zijn bang te worden afgesluiterd, en het gebruik van openbare telefoons zou hen helemaal direct verraden. De een weet dus niet welke opdracht de ander krijgt, laat staan hoe de aanslag afloopt.
Stel nu dat *in het geval ze beiden dezelfde opdracht krijgen*, Leonard *altijd* slaagt in zijn missie als Roger slaagt, en *altijd* faalt als Roger faalt. Dit geldt voor elk van de mogelijke drie opdrachten. Hoe is dit mogelijk?

Opgave 11.1

Bedenk zelf mogelijke verklaringen voor de correlatie tussen de missies van de twee agenten.

De enige redelijke mogelijkheid lijkt dat ze van tevoren, in Londen dus, *afspraken* van de volgende vorm maken:

1. Bij de eerste opdracht doen we bij A *beiden* onze uiterste best om te doden (wat dan ook ongetwijfeld lukt), bij B nemen we *beiden* geen enkel risico (zodat we vrijwel zeker zullen falen), bij C doen we weer *beiden* geweldig ons best. Deze afspraak noteren ze als $+-+$.
2. Bij de tweede opdracht spreken we $--+$ af.
3. Bij de derde opdracht…

Opgave 11.2

Leg uit dat dergelijke afspraken de correlaties (10.7) tot en met (10.10) verklaren.

Hoe deze afspraken tot stand komen doet er niet toe. Als ze willen kunnen de agenten een muntje opgooien. Een dergelijke serie afspraken speelt dan de rol van het onzichtbare toevalsproces in het vorige voorbeeld, waarin Maartje twee ballen trekt.

Opgave 11.3

a) Leg uit wat de analogie is tussen het experiment met twee fotonen en de situatie met de twee geheime agenten.
b) Formuleer precies welke potentiële verklaring van het fotonexperiment de rol speelt van de serie afspraken tussen de geheime agenten.
c) Laat zien dat je onder een dergelijke verklaring het gegeven kansexperiment (fotonen of agenten) met zes vragen $A_L, A_R, B_L, B_R, C_L, C_R$ kunt vertalen in een kansexperiment met drie vragen A, B, C, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} P(A_L = +) &= P(A_R = +) = P(A); & (11.1)\\ P(A_L = + \, en \, A_R = +) &= P(A); & (11.2)\\ P(A_L = + \, en \, B_R = -) &= P(A = + \,\&\, B = -), & (11.3)\\ P(B_L = + \, en \, C_R = -) &= P(B = + \,\&\, C = -), & (11.4) \end{aligned}$$

enzovoort.

Je zult in het vervolg zien dat deze verklaring van het fotonexperiment *fout* is. De gegeven verklaring leidt tot de Bell-ongelijkheid voor drie of vier vragen, maar die worden in de natuur beide door het experiment met twee EPR-gecorreleerde fotonen geschonden.

12

Het tensorproduct

In hoofdstuk 9 hebben we experimenten met één foton bekeken. We zagen daar dat de toestand van het foton gerepresenteerd kon worden door een éénheidsvector in het platte vlak. De kans dat een foton in een bepaalde toestand 'ja' antwoordde op een vraag kon berekend worden met behulp van het inproduct. Om een kwantumsysteem dat uit twee of meer deeltjes bestaat te beschrijven is het nieuwe wiskundige begrip tensorproduct van twee vectoren nodig. Hiermee ga je in het volgende hoofdstuk de correlaties berekenen die leiden tot de schending van de Bell-ongelijkheden.

Het tensorproduct

Je weet dat je twee vectoren op kunt tellen volgens de regel (8.2). De *som* van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ is daarmee opnieuw een vector in $\mathbb{R}^2$. Je hebt in definitie (8.10) ook het *inproduct* van twee vectoren gezien. Dat is geen vector, maar een getal.

Het *tensorproduct* van twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$, dat we aangeven met $\vec{v} \otimes \vec{w}$, is weer een heel andere zaak! Het tensorproduct $\vec{v} \otimes \vec{w}$ is opnieuw een vector. Deze vector ligt echter niet in het platte vlak $\mathbb{R}^2$, maar in een ruimte van dimensie 4!

Dit is helaas niet meer voorstelbaar. Gelukkig worden wiskundige objecten bepaald door hun eigenschappen en niet door hun aanschouwelijkheid. Kennen we de eigenschappen van een wiskundig object, dan kunnen we ermee rekenen zonder dat we ons druk hoeven te maken hoe we ons dit object moeten voorstellen. We hebben daar al aan het eind van hoofdstuk 8 op gewezen in verband met vectoren in hogere dimensies. Lees dat stukje nog maar eens door. En nu zien we dat $\vec{v} \otimes \vec{w}$ is zo'n vector in een hogere dimensie is.

Stel dat $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ en $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right)$. Het tensorproduct $\vec{v} \otimes \vec{w}$ is gedefinieerd als

$$\vec{v} \otimes \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_1 w_2 \\ v_2 w_1 \\ v_2 w_2 \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Opgave 12.1

Laat zien dat $v \otimes w$ *niet* hetzelfde is als $w \otimes v$.

Dit is een groot verschil met het optellen van vectoren en met het nemen van het inproduct: daar had je $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ en $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.

Eigenschappen van het tensorproduct

De rekenregels voor vectoren in het platte vlak uit hoofdstuk 8 blijven geldig. De som $\vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{w} \otimes \vec{z}$ is

bijvoorbeeld gedefinieerd door formule (8.18) samen met de definitie (12.1) en vormt opnieuw een vector in dimensie 4.
En omdat het tensorproduct $\vec{v} \otimes \vec{w}$ een vector is, kunnen we het met een reëel getal t vermenigvuldigen door middel van

$$t(\vec{v} \otimes \vec{w}) = \begin{pmatrix} tv_1w_1 \\ tv_1w_2 \\ tv_2w_1 \\ tv_2w_2 \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Opgave 12.2

a) Laat met behulp van (12.2) zien dat je (net als bij de vermenigvuldiging van getallen) als volgt haakjes kunt wegwerken:

$$\begin{aligned} \vec{v} \otimes (\vec{w} + \vec{z}) &= \vec{v} \otimes \vec{w} + \vec{v} \otimes \vec{z}; & (12.3) \\ (\vec{v} + \vec{w}) \otimes \vec{z} &= \vec{v} \otimes \vec{z} + \vec{w} \otimes \vec{z}. & (12.4) \end{aligned}$$

b) Laat met behulp van (12.1) zien dat

$$t(\vec{v} \otimes \vec{w}) = \vec{tv} \otimes \vec{w} = \vec{v} \otimes \vec{tw}. \tag{12.5}$$

Ook kunnen we, net als in het platte vlak, het inproduct nemen van twee tensorproducten. De definitie is een speciaal geval van de laatste opgave in hoofdstuk 8. Het inprodukt van twee willekeurige vectoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ en $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ in dimensie 4 is naar analogie van de definitie (8.10) in het platte vlak gegeven door

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \tag{12.6}$$

Als we nu $\vec{x} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ en $\vec{y} = \vec{w} \otimes \vec{z}$ kiezen, dan volgt een formule voor het inproduct van twee tensorproducten.

Opgave 12.3

Schrijf deze formule op met behulp van de definities (12.1) en (12.6) en laat zien dat

$$\langle \vec{u} \otimes \vec{v}, \vec{w} \otimes \vec{z} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle. \tag{12.7}$$

De eigenschappen (8.11) tot en met (8.14) van het inproduct in het platte vlak blijven geldig in dimensie 4.

Opgave 12.4

Ga na dat uit (8.12) en (12.7) volgt dat:

$$\langle \vec{u_1} \otimes \vec{u_2}, \vec{v_1} \otimes \vec{v_2} + \vec{w_1} \otimes \vec{w_2} \rangle = \langle \vec{u_1} \otimes \vec{u_2}, \vec{v_1} \otimes \vec{v_2} \rangle + \langle u_1 \vec{\otimes} \vec{u_2}, \vec{w_1} \otimes \vec{w_2} \rangle. \tag{12.8}$$

De lengte van een vector in dimensie 4 wordt nog steeds door formule (8.14) in hoofdstuk 8 bepaald. In het volgende hoofdstuk zul je de vector

$$\Psi_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right) \tag{12.9}$$

tegenkomen. De reden voor de merkwaardige factor $1/\sqrt{2}$ is als volgt.

Opgave 12.5

Toon aan dat Ψ_{EPR} lengte 1 heeft. Dus toon aan: $||\Psi_{\text{EPR}}|| = 1$.

13

Berekening van de EPR-correlaties

In dit hoofdstuk pas je de theorie van het tensorproduct toe op een experiment met twee fotonen. Je construeert een toestand waarin een fotonpaar EPR-gecorreleerd is en leert hoe je vragen aan het samengestelde systeem van twee fotonen wiskundig kunt voorstellen. Met behulp van dit formalisme bereken je de correlaties die uiteindelijk tot schending van de Bell-ongelijkheden leiden.

Na de wiskunde van het vorige hoofdstuk keren we terug naar de natuurkunde. De theorie van het tensorproduct van vectoren was bedoeld om de kwantumtheorie van samengestelde systemen wiskundig te beschrijven. We laten nu zien hoe dit gaat voor het experiment met de twee fotonen waar hoofdstuk 10 over ging.

We geven vectoren die het linkerfoton beschrijven een label L mee. Vragen aan het linkerfoton worden dan genoteerd met A_L en toestanden van het linkerfoton met $\vec{\psi}_L$. Soortgelijk rechts met het label R. Is $\vec{\psi}_L$ de toestand van het linkerfoton en $\vec{\psi}_R$ de toestand van het rechterfoton, dan is $\vec{\psi}_L \otimes \vec{\psi}_R$ een mogelijke toestand van het fotonpaar. Als het linkerfoton en het rechterfoton hun trillingsrichting bijvoorbeeld allebei langs de x-as hebben, dan zijn ψ_L en ψ_R beide de vector $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. De toestand van het fotonpaar is dan het tensorproduct

$$\vec{\psi}_L \otimes \vec{\psi}_R = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right). \tag{13.1}$$

Als beide fotonen daarentegen langs de z-as trillen, is de gezamenlijke toestand

$$\vec{\psi}_L \otimes \vec{\psi}_R = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right). \tag{13.2}$$

Het EPR-gecorreleerde fotonpaar in het experiment van hoofdstuk 10 bevindt zich echter in de ingewikkeldere toestand

$$\Psi_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \right). \tag{13.3}$$

De rol van de fcator $1/\sqrt{2}$ is in de laatste opgave van het vorige hoofdstuk duidelijk geworden: die zorgt ervoor dat $\|\Psi_{\text{EPR}}\| = 1$.
Deze toestand is niet eenvoudiger te schrijven (bijvoorbeeld als het tensorproduct van twee vectoren), maar slechts als de som van dergelijke producten. Het blijkt dat fotonenparen van de soort die de Bell-ongelijkheden schenden altijd wiskundig kunnen worden gerepresenteerd door de som van twee of meer tensorproducten van vectoren.

Vragen in experimenten met twee fotonen
Vragen in experimenten met twee fotonen zijn samengesteld uit twee delen: een vraag aan het linkerfoton, A_L, en een vraag aan het rechterfoton, B_L. Voorbeelden van samengestelde vragen zijn:

1. 'Wordt het linkerfoton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek α maakt met de x-as en wordt tegelijk het rechterfoton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek β maakt met de x-as?'
2. 'Wordt het linkerfoton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek α maakt met de x-as en wordt tegelijk het rechterfoton geabsorbeerd door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek β maakt met de x-as?'

De eerste vraag kunnen we afkorten met '$A_L = +$ *en* $B_R = +$' de tweede vraag met '$A_L = +$ *en* $B_R = -$'.

Opgave 13.1

a) Formuleer de vraag '$A_L = -$ *en* $B_R = +$' in woorden.
b) Kort de volgende vraag af in bovenstaande notatie:
'Wordt het linkerfoton geabsorbeerd door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek α maakt met de x-as en wordt tegelijk het rechterfoton geabsorbeerd door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek β maakt met de x-as?'

De toestand van een foton dat met zekerheid 'ja' antwoordt op een bepaalde vraag is van belang bij het berekenen van de kans dat een foton in een *willekeurige* toestand op dezelfde vraag 'ja' antwoordt (zie het voorschrift voor het berekenen van zo'n kans in hoofdstuk 9). In dat hoofdstuk hebben we gezien dat fotonen in een bepaalde toestand (namelijk als ze trillen in de richting van de polarisatie-as van het polaroidglas) met zekerheid worden doorgelaten. Dit gegeven gebruiken we om te bepalen voor welke toestanden de bovenstaande vragen met zekerheid met 'ja' worden beantwoord:

1. De eerste vraag zal zeker met 'ja' worden beantwoord als het linkerfoton en het rechterfoton allebei worden doorgelaten. Alleen als beide fotonen trillen in de richting van de polarisatie-as behorende bij de vraag die hun gesteld wordt, zullen ze met zekerheid worden doorgelaten. Dat betekent dat het linkerfoton toestand $\vec{A_L} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ moet hebben en het rechterfoton toestand $\vec{B_R} = \binom{\cos\beta}{\sin\beta}$.
Hieruit mogen we concluderen dat het fotonpaar zich in de toestand
$$\vec{A_L} \otimes \vec{B_L} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} \otimes \binom{\cos\beta}{\sin\beta} \tag{13.4}$$
moet bevinden opdat de eerste vraag met zekerheid positief wordt beantwoord.

2. De tweede vraag zal zeker met 'ja' beantwoord worden als het linkerfoton wordt doorgelaten en het rechterfoton wordt geabsorbeerd. Het linkerfoton moet opnieuw trillen in de richting van de polarisatie-as behorende bij vraag A_L, zodat wederom geldt $\vec{A_L} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
De eis dat het rechterfoton met zekerheid geabsorbeerd moet worden betekent dat het rechterfoton moet trillen in de richting loodrecht op de polarisatie-as behorende bij vraag B_R.
Er moet dus gelden $\vec{B_R} = \binom{\cos(\beta+\frac{1}{2}\pi)}{\sin(\beta+\frac{1}{2}\pi)} = \binom{-\sin\beta}{\cos\beta}$.
Hieruit mogen we concluderen dat het fotonpaar toestand
$$\vec{A_L} \otimes \vec{B_L} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} \otimes \binom{-\sin\beta}{\cos\beta} \tag{13.5}$$
moet hebben opdat de tweede vraag met zekerheid positief wordt beantwoord.

Opgave 13.2

Geef net als hierboven voor elk van de twee vragen die in de vorige opgave aan bod kwamen de toestand $\vec{A_L} \otimes \vec{B_R}$ die een fotonpaar moeten hebben om de vraag zeker met 'ja' te beantwoorden.

Kansen berekenen in experimenten met twee fotonen
We herhalen nog eens de eerste twee punten van het voorschrift dat we in hoofdstuk 9 gaven om de kans uit te rekenen dat een vraag A positief beantwoord wordt door een foton met toestand $\vec{\Psi}$:

1. Neem een ja/nee vraag A aan een fysisch systeem en vind alle toestanden van dit systeem waarin het antwoord op de vraag met zekerheid "ja" is. In het vervolg gaan we er vanuit dat dit (net als in het geval van het foton) slechts voor één toestand het geval is, die we $\vec{A}$ noemen.

2. In een willekeurige toestand $\vec{\Psi}$ is het antwoord op vraag A in principe onvoorspelbaar. De kans dat het antwoord "ja" is, is gelijk aan het kwadraat van het inproduct tussen de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{\Psi}$, dus

$$P(A|\vec{\Psi}) = \langle \vec{A}, \vec{\Psi} \rangle^2$$

waarbij $P(A|\vec{\Psi})$ staat voor de kans dat een foton in toestand $\vec{\Psi}$ vraag A met 'ja' beantwoordt.

Het bovenstaande voorschrift kunnen we, met enkele aanpassingen, ook toepassen op het experiment met twee fotonen. We hebben al gezien dat een vraag A in een experiment met twee fotonen is opgebouwd uit een vraag aan het linkerfoton en een vraag aan het rechterfoton, respectievelijk A_L en B_R. In de vorige opgave heb je zelf voor een tweetal dergelijke vragen de toestand bepaald waarin het antwoord met zekerheid 'ja' is. Zo'n toestand bleek van de vorm $\vec{A_L} \otimes \vec{B_L}$ te zijn. Vullen we deze toestand in in stap 2 van het bovenstaande voorschrift, dan zie je dat je het inproduct moet bepalen van tensorproducten van vectoren!

We zullen nu met het gegeven voorschrift een uitdrukking voor $P(A_L = + \textit{ en } B_R = + \mid \Psi_{\mathrm{EPR}})$ afleiden. $P(A_L = + \textit{ en } B_R = + \mid \Psi_{\mathrm{EPR}})$ is de kans dat de volgende vraag door een fotonpaar in toestand Ψ_{EPR} met 'ja' beantwoord wordt:

> 'Wordt het linkerfoton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek α maakt met de x-as en wordt tegelijk het rechterfoton doorgelaten door een polarisator waarvan de polarisatie-as een hoek β maakt met de x-as?'

1. In (13.4) hebben we gevonden dat de toestand van het fotonpaar dat de bovenstaande vraag met zekerheid met 'ja' te beantwoordt gegeven wordt door:

$$\vec{A_L} \otimes \vec{B_L} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Dit is onderdeel één van het voorschrift.

2. Eerder zagen we dat

$$\Psi_{\mathrm{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right).$$

Deze uitdrukking vullen we tesamen met de vector die we gevonden hebben bij onderdeel 1 in in onderdeel 2 van het voorschrift.

Opgave 13.3

Controleer dat geldt:

$$P(A_L = + \textit{ en } B_R = + \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) = \langle \left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right) \rangle^2. \tag{13.6}$$

en laat zien dat

$$P(A_L = + \textit{ en } B_R = + \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\alpha - \beta). \tag{13.7}$$

Om deze opgave te maken kun je het beste niet de definitie (12.1) gebruiken, maar de eigenschappen van het tensorproduct (12.3) tot en met (12.5) en de eigenschappen van het inproduct (12.7) en (12.8). Ook de algemene eigenschappen van vectoren en inproduct uit hoofdstuk 8 komen goed van pas. Ten slotte zul je één van de goniometrische formules van je formulekaart moeten gebruiken.

Opgave 13.4

a) Reken nu volgens dezelfde procedure de volgende kansen na:

$$P(A_L = + \textit{ en } B_R = - \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\alpha - \beta); \tag{13.8}$$
$$P(A_L = - \textit{ en } B_R = + \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\alpha - \beta). \tag{13.9}$$

b) Leid daaruit af dat

$$P(A_L \neq B_L \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) = \sin^2(\alpha - \beta). \tag{13.10}$$

c) Kies ten slotte $\beta = \alpha$ en leid daaruit de EPR-correlaties (10.7) tot en met (10.10) af.

14

Het bestaan van zuiver toeval

In dit slothoofdstuk geven we eerst een korte samenvatting van de inhoud van de voorgaande hoofdstukken. Er blijkt dan nog een addertje onder het gras te zijn, dat ons verhindert meteen te kunnen concluderen dat zuiver toeval bestaat. Daarvoor moeten we namelijk bewijzen dat óók als slechts twee vragen tegelijkertijd gesteld kunnen worden, de Bell-onglijkheden volgen onder de aanname dat toeval door onwetendheid veroorzaakt wordt. Omdat dit een behoorlijke klus blijkt te zijn, is dit één van de keuzeonderwerpen. Tot slot van dit hoofdstuk laat je zien dat je met behulp van EPR-correlaties de schending van de Bell-ongelijkheden kunt aantonen. Hiermee is het bestaan van zuiver toeval bewezen!

Een terugblik

In hoofdstuk 1 zijn we begonnen met filosoferen over het begrip toeval. Uiteindelijk hebben we geconcludeerd dat er twee soorten van toeval bestaan: Toeval dat veroorzaakt wordt door onwetenheid en toeval dat níet veroorzaakt wordt door onwetendheid. Dit laatste toeval noemen we *zuiver*.
In hoofdstuk 2 hebben we gezien dat er aan het begin van de 20e eeuw een verhit debat werd gevoerd over de vraag of zuiver toeval wel echt bestaat.
In hoofdstuk 3 hebben we het argument geschetst dat het bestaan van zuiver toeval aantoont. De kern van hoofdstuk 3 is de volgende bewering:

> Als toeval komt door onwetendheid, dan voldoen de correlaties aan de Bell-ongelijkheden. (14.1)

Hieruit concludeerden we:

> Als de correlaties van een toevalsproces niet voldoen aan de Bell-ongelijkheden, dan wordt het toeval niet veroorzaakt door onwetendheid. (14.2)

Vanaf hoofdstuk 3 werd onze missie dus: bovenstaande beweringen bewijzen (hoofdstuk 4 tot en met 7) en een toevalsproces vinden waarin de Bell-ongelijkheden geschonden worden (hoofdstuk 8 tot en met 13).
In hoofstuk 4 hebben we de Bell-ongelijkheden voor drie vragen beter bekeken. We hebben bewezen dat er in het geval van een enquête aan wordt voldaan. Ook hebben we in de laatste opgave van hoofdstuk 4 een concreet voorbeeld gezien van een wiskundige situatie waarin de Bell-ongelijkheid voor 3 vragen geschonden wordt.
Na een korte inleiding op de wiskundige kanstheorie in hoofdstuk 5 en 6, hebben we in hoofdstuk 7 bewezen dat uit toeval door onwetendheid de Bell-ongelijkheden kunnen worden afgeleid. (Op het Dutch Book argument na, dat je als een keuze onderwerp kunt kiezen).

Dit was het eerste gedeelte van het project. In het tweede gedeelte zijn we op zoek gegaan naar een toevalsproces dat de Bell-ongelijkheden schendt en zo kwamen we terecht bij de kwantummechanica. In hoodstuk 8 introduceerden we de begrippen vector en inproduct en in hoofdstuk 9 zagen we hoe deze begrippen gebuikt worden om de kwantummechanica te beschrijven.

In hoofdstuk 10 zagen we dat in de kwantummechanica niet zomaar alle vragen naast elkaar gesteld kunnen worden. We zagen echter ook dat EPR-correlaties het wel mogelijk maken om twee vragen 'tegelijkertijd' te stellen. Hoofdstuk 11 ging in op een mogelijke verklaring voor deze perfecte EPR-correlaties. Vervolgens hebben we in hoofdstuk 12 en 13 een nieuw wiskundig begrip, het tensorproduct, ingevoerd om de nieuwe situatie, waarin fotonenparen een belangrijke rol spelen, te beschrijven.
We willen nu laten zien dat voor bepaalde vragen A, B, C en eventueel D (dat wil zeggen onder meting van bepaalde hoeken α, β, γ, en eventueel δ) de Bell-ongelijkheden geschonden worden.

Een addertje onder het gras
Voor we laten zien dat de Bell-ongelijkheden inderdaad geschonden worden moeten we echter nog even stilstaan bij het volgende:
In onze afleiding van de Bell-ongelijkheden in hoofdstuk 7 zijn we er stilzwijgend vanuit gegaan dat het wél mogelijk is om alle vragen naast elkaar te stellen. Bij de opgaven van hoofdstuk 7 waarin deze afleiding tot stand kwam heb je immers naar kansen gekeken van de vorm $P(+--), P(++-)$, etc. Deze kansen bestaan echter niet als de vragen A, B en C niet alledrie naast elkaar gesteld worden. In de situatie van de kwantummechanica, waarin slechts twee vragen tegelijkertijd gesteld kunnen worden, geldt onze oude afleiding dus niet meer. Er is daarom een nieuw argument nodig.

Het blijkt inderdaad dat ook in de situatie dat er slechts twee vragen naast elkaar gesteld kunnen worden, de Bell-ongelijkheden volgen uit de aanname dat toeval veroorzaakt wordt door onwetendheid. Om dit te kunnen bewijzen moet de aanname dat toeval veroorzaakt wordt door onwetendheid op een hele subtiele manier geformuleerd worden.
Om dit uit te leggen geven herinneren we je aan een tweetal kansexperimenten die we tot nu toe bekeken hebben:

1. Leo en Rogier die steeds een blauwe of een rode bal opvangen (hoofdstuk 11);
2. Het experiment met twee fotonen (hoofdstuk 10);

In het eerste geval is er sprake van een onderliggend proces dat de uitkomst van het overeenkomstige kansexperiment bepaalt, namelijk Maartje die midden tussen Leo en Rogier ballen uit een vaas trekt.
Bij het experiment met de twee fotonen is het in eerste instantie niet duidelijk of er ook nu een dergelijk onderliggend proces bestaat. Zo'n proces zou bijvoorbeeld kunnen plaatsvinden in het atoom dat het fotonpaar uitzendt. Einstein en sommige anderen dachten dat zo iets zou moeten bestaan om de EPR-correlaties tussen de twee fotonen te kunnen verklaren. Het idee was dat dit diepere proces dan deterministisch zou moeten zijn.

Onzichtbare toevalsprocessen
Stel nu dat Einstein gelijk had. Dan hebben de twee kansexperimenten op de bovenstaande lijst beide de eigenschap dat er een 'onzichtbaar' proces bestaat dat de uitkomst van het kansexperimenten bepaalt. Als het wel zichtbaar zou zijn vervalt het hele toevalskarakter van het kansexperiment:

1. Leo en Rogier zouden dan meteen weten welke bal ze krijgen nadat Maartje er twee (van dezelfde kleur) heeft getrokken;
2. De twee fysici die het fotonexperiment uitvoeren zouden het atoom kunnen observeren en uitrekenen hoe het nieuwe proces in dat atoom hun meetwaarden verklaart.

Het idee achter onze algemene definitie van toeval door onwetendheid, die ook van toepassing is als niet alle vragen in een kansexperiment tegelijkertijd gesteld kunnen worden, is dan het volgende:

> **Aanname:** *Er is een 'onzichtbaar' deterministisch proces dat de uitkomst van het gegeven kansexperiment bepaalt. Zowel de uitkomsten van dit onzichtbare proces als de invloed ervan op het kansexperiment zijn ons onbekend.*

De precieze versie van deze aanname vind je in één van de keuzeonderwerpen. In het betreffende keuzeonderwerp ga je bewijzen dat ook toevalsprocessen waarbij niet alle vragen tegelijkertijd gesteld kunnen worden, onder aanname van onwetendheid, voldoen aan de Bell-ongelijkheden. Je zult daar ook uitvinden waarom dit hele verhaal overbodig is als alle vragen van het kansexperiment naast elkaar gesteld kunnen worden.

Voorlopig is het voldoende als het je duidelijk is dat de onzichtbaarheid van het proces ons ertoe dwingt het als toevalsproces te beschouwen, waarbij het toeval dan per definitie een gevolg is van onwetendheid (want voor een alwetende zou het proces zichtbaar en voorspelbaar zijn). Bovendien moeten we, met hetzelfde argument, de invloed van het onzichtbare proces op het kansexperiment door middel van toeval door onwetendheid formuleren. Dit gebeurt door middel van *voorwaardelijke kansen*. De wiskundige manier waarop dat allemaal gebeurt vind je ook in het desbetreffende keuzeonderwerp. Net als in het eerste deel van het project zal het *Dutch Book Theorem* een belangrijke rol spelen.

Opgave 14.1

Formuleer ook de enquête op een markt (hoofdstuk 4) en de opdrachten aan Leonard en Roger in respectievelijk Cuba en Noord-Korea in termen van een kansepxeriment met een 'onzichtbaar' proces dat de uitkomsten verklaart.

Stellingen over de Bell-ongelijkheden

In principe kun je nu de volgende stellingen bewijzen. Hierin vind je steeds (tot vervelens toe) de formulering: "Als het toeval in dit kansexperiment wordt veroorzaakt door onwetendheid,..."Hiermee bedoelen we de precieze versie van de bovenstaande aanname, zoals uitgewerkt in het keuzeonderwerp. Zowel deze formulering van toeval door onwetendheid als het bewijzen van deze stellingen is een behoorlijke klus. Het vereist goed wiskundig inzicht in het kansbegrip, inclusief het begrip voorwaardelijke kans. Mocht je deze uitdaging aan willen gaan, dan kun je het kiezen als je keuzeonderwerp! Hoewel we de stellingen hier dus niet bewijzen, kun je ze wel gebruiken om te laten zien dat de resulateten van het experiment met EPR-correlaties het bestaan van zuiver toeval aantonen.

Stelling 14.1 *Stel dat een kansexperiment bestaat uit drie ja/nee vragen A, B en C, waarin twee willekeurige vragen tegelijk gesteld kunnen worden. Als het toeval in dit kansexperiment wordt veroorzaakt door onwetendheid, dan geldt de Bell-ongelijkheid*

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C). \tag{14.3}$$

Deze stelling is waar (anders zou het geen stelling zijn), maar je blijkt er niets aan te hebben om het bestaan van zuiver toeval te bewijzen. Om dit te bewijzen moet je namelijk de schending van een Bell-ongelijkheid aantonen, en die schending vind je in de natuur pas bij vier of zes vragen. De schending van zes vragen heeft echter wel heel sterk te maken met de situatie voor drie vragen! De relevante stelling is als volgt.

Stelling 14.2 *Stel dat een kansexperiment bestaat uit zes ja/nee vragen $A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R$, waarin alle paren van vragen van de vorm (X_L, Y_R) tegelijk gesteld kunnen worden (met $X = A$, $X = B$ of $X = C$ en $Y = A$, $Y = B$ of $Y = C$). Stel tevens dat de EPR-correlaties* (10.11) *en* (10.12) *gelden, oftewel*

$$P(A_L = A_R) = 1; \tag{14.4}$$
$$P(A_L \neq A_R) = 0. \tag{14.5}$$

Als het toeval in dit kansexperiment wordt veroorzaakt door onwetendheid, dan geldt de Bell-ongelijkheid

$$P(A_L \neq C_R) \leq P(A_L \neq B_R) + P(B_L \neq C_R). \tag{14.6}$$

Je gaat zo dadelijk uitrekenen dat de ongelijkheid (14.6) in de kwantumtheorie van twee EPR-gecorrleerde fotonen wordt geschonden. Experimenteel gesproken is het echter heel moeilijk om links en rechts (op grote afstand van elkaar) precies dezelfde vragen A, B en C te stellen. Om dat te doen moeten de polarisatiehoeken zowel links als rechts precies gelijk zijn aan α, β en γ en als dat niet heel nauwkeurig lukt kunnen de correlaties (14.4) en (14.5) niet experimenteel worden vastgesteld.

Het is veel makkelijker om metingen te verrichten waarbij de hoeken α en β links onafhankelijk worden gekozen van de hoeken γ en δ rechts. In dat geval geldt het volgende.

Stelling 14.3 *Stel dat een kansexperiment bestaat uit vier ja/nee vragen A, B en C, waarin de volgende paren van vragen tegelijk gesteld kunnen worden: (A, C), (A, D), (B, C) en (B, D). Als het toeval in dit kansexperiment wordt veroorzaakt door onwetendheid, dan geldt de Bell-ongelijkheid*

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq D) + P(B \neq C) + P(B \neq D). \tag{14.7}$$

Schending van de Bell-ongelijkheden
Nu ga je bewijzen dat de EPR-correlaties tussen fotonen de Bell-ongelijkheden (14.7) en (14.6) schenden. We herhalen daartoe voor het gemak (13.10) samen met soortgelijke formules voor $P(A_L \neq C_R)$ en $P(B_L \neq C_R)$:

$$\begin{aligned} P(A_L \neq B_R \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) &= \sin^2(\alpha - \beta); && (14.8) \\ P(A_L \neq C_R \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) &= \sin^2(\alpha - \gamma); && (14.9) \\ P(B_L \neq C_R \mid \Psi_{\mathrm{EPR}}) &= \sin^2(\beta - \gamma). && (14.10) \end{aligned}$$

Opgave 14.2

a) Laat op dezelfde manier als in hoofdstuk 4 zien dat de correlaties (14.8) tot en met (14.10) de Bell-ongelijkheid (14.6) schenden.

b) Stel nu dat rechts vragen A_L en B_L en links vragen C_R en D_R worden gesteld, waarbij in het laatste geval onder een hoek δ van de polarisatieas wordt gemeten. Schrijf naar analogie van (14.8) tot en met (14.10) formules op voor $P(A_L \neq D_R \mid \Psi_{\mathrm{EPR}})$ en $P(B_L \neq D_R \mid \Psi_{\mathrm{EPR}})$ en laat zien dat de de Bell-ongelijkheid

$$P(A_L \neq C_R) \leq P(A_L \neq D_R) + P(B_L \neq C_R) + P(B_L \neq D_R) \qquad (14.11)$$

voor bepaalde keuzes van de hoeken $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wordt geschonden.

Gefeliciteerd!
Als je nu de Stellingen 14.2 en 14.3 combineert met de bovenstaande opgave, begrijp je dat je nu het bestaan van zuiver toeval in de natuur hebt bewezen!

15

Keuzeonderwerp 1: Het *Dutch Book Theorem*

In dit keuzeonderwerp leid je Stelling 6.1 oftewel het *Dutch Book Theorem* ***af. Deze stelling speelde een belangrijke rol in de afleiding van de Bell-ongelijkheden. De uitgebreide versie waarin ook voorwaardelijke kansen zijn opgenomen speelt ook een rol in de algemene definitie van toeval door onwetendheid in het tweede keuzeonderwerp. Los van deze technische resultaten ga je nadenken over de vraag wat een kans tussen 0 en 1 (zoals 1/2) op een éénmalige gebeurtenis kan betekenen als die gebeurtenis volgens de natuurwetten zeker wel of niet plaatsvindt (en dus eigenlijk, voor een alwetende, met kans 1 of 0). Een dergelijke kans blijkt een uitdrukking te zijn voor het geloof dat iemand heeft dat de gebeurtenis plaatsvindt. Een wiskundige theorie van mentale kansen ontstaat als we dit geloof vertalen in de bereidheid te wedden op het al dan niet plaatsvinden van de gebeurtenis.***

Mentale kansen

Je hebt in hoofdstuk 4 laten zien dat de correlaties tussen gegeven antwoorden op vragen in een enquête voldoen aan de Bell-ongelijkheid (4.7). Hoe interpreteren we de conclusie van de marktonderzoekster uit haar Tabel 4.1 dat de relatieve frequentie dat iemand een dvd-speler bezit 1/2 is (en idem dito voor een cd-speler en een iPod)?

Je kunt hier twee kanten mee op. Als de steekproef representatief en voldoende groot is, zal het zo zijn dat ongeveer de helft van de Nederlanders een dvd-speler heeft, de helft (mogelijk een andere helft!) een een cd-speler, en weer een andere helft een iPod. Dat is eigenlijk wat haar opdrachtgever (Philips bijvoorbeeld) wil weten, en deze conclusie is een objectief gegeven over de Nederlandse bevolking.
Maar er is een andere kant van de medaille, die al in Hoofdstuk 1 aan de orde is gekomen. Als de onderzoekster een nieuw (representatief) persoon tegenkomt, zal zij denken dat de ***kans*** dat die persoon een dvd-speler bezit 1/2 is, enzovoort.
Wat betekent deze kans? Het betekent dat zij denkt dat het even waarschijnlijk is dat deze persoon wél of juist niet een cd-speler heeft. Aan de persoon zelf is natuurlijk bekend of hij een dvd-speler heeft (tenzij hij stomdronken is of er juist op dat moment bij hem wordt ingebroken, maar daar houden we nu even geen rekening mee). Deze persoon zal dus volhouden dat de kans dat hij een dvd-speler heeft is gelijk aan 1 (als hij er een heeft), of aan 0 (als dat niet het geval is). Wat deze ene persoon betreft is de kans van 1/2 dat juist hij een dvd-speler heeft dus een getal dat uitsluitend in het hoofd van de onderzoekster bestaat.
Een dergelijke kans noemen we daarom ***mentaal***. De onderzoekster heeft weliswaar goede redenen te denken dat de kans op de gegeven gebeurtenis 1/2 is (namelijk haar eerdere enqête), maar voor iemand die alles weet is de kans 0 of 1.

Eénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen.

Een subtiel maar belangrijk verschil in gebeurtenissen waarop we een kans bepalen is het verschil tussen éénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen. We noemen een gebeurtenis *éénmalig* als deze gebeurtenis slechts één keer al dan niet kan plaatsvinden. Een éénmalige gebeurtenis is bijvoorbeeld 'de volgende persoon die ik tegenkom heet een dvd-speler' of 'de zon schijnt op 2 november 2006' of 'de uitkomst van de eerstvolgende worp met deze dobbelsteen is zes'.
Bij een *herhaaldelijke* gebeurtenis daarentegen kunnen we meerdere keren achter elkaar bepalen of de gebeurtenis plaatsvindt. Voorbeelden van herhaaldelijke gebeurtenissen zijn: 'iemand die ik tegenkom heeft een dvd-speler, 'de zon schijnt op zondag' en 'de uitkomst van een worp met een dobbelsteen is zes'. We komen vaak mensen tegen, we kunnen iedere zondag opnieuw bepalen of de zon schijnt en we kunnen zo vaak met een dobbelsteen werpen als we willen.
Het onderscheid tussen éénmalige en herhaaldelijke gebeurtenissen is van groot belang met betrekking tot de interpretatie van het kansbegrip. De hele discussie of zuiver toeval al dan niet bestaat gaat in feite over éénmalige gebeurtenissen, want dat het op zondag soms regent en soms niet is een open deur.

De interpretatie van een kans hangt samen met het type gebeurtenis waarop een kans gegeven wordt. Een kans op een herhaaldelijke gebeurtenis wordt vaak bepaald door te kijken naar een groot aantal uitkomsten van deze gebeurtenis en de frequentie te berekenen. Concreet betekent dit voor de gebeurtenis 'het regent op zondag' dat je bijvoorbeeld kijkt naar het aantal zondagen dat het afgelopen jaar geregend heeft en dit deelt door het totaal aantal zondagen. Voor de kansen die onze marktonderzoekster heeft bepaald en voor de kans op zes bij dobbelen geldt precies hetzelfde.

Determinisme, éénmalige gebeurtenissen en mentale kansen

We beperken ons verder tot éénmalige gebeurtenissen en nemen aan dat het toevalskarakter van een dergelijke gebeurtenis wordt veroorzaakt door gebrek aan informatie die in principe beschikbaar is. Deze laatste aanname kan ook zo worden geformuleerd: de uitkomst van de gebeurtenis is in principe bepaald, maar onbekend.
Zoals we hebben gezien is het toch vaak zo dat we kansen tussen 0 en 1 aan zulke gebeurtenissen toeschrijven. Omdat de werkelijke kans (zoals bepaald door de natuurwetten) volgens onze aanname van determinisme gelijk is aan 0 of 1, hebben we boven al geconcludeerd dat iedere andere kans dan 0 of 1 (zoals 1/2) wel mentaal moet zijn: hij bestaat wel in iemands hoofd, maar heeft geen evenknie in de natuur zelf.

Een mentale kans is dus niets anders dan een getalsmatige uitdrukking van de ***mate van geloof*** die iemand in de gebeurtenis heeft. De mate van geloof die een persoon heeft in een bepaalde gebeurtenis zal vanzelfsprekend afhangen van de voorkennis die hij of zij met betrekking tot de gebeurtenis heeft. Dat wil zeggen: de kans die je toekent aan een gebeurtenis hangt af van de hoeveelheid achtergrondinformatie die je hebt over de gebeurtenis. Maar de kans hangt ook af van de manier waarop je de voorkennis verwerkt (bijvoorbeeld door deze heel serieus te nemen, of juist te negeren).

Een mooi voorbeeld van een mentale kans is nog het volgende: bij de huidige (beperkte) kennis over de banen van planetoïden is er een kans van 0.0014 dat er de komende 100 jaar één op de aarde inslaat. Onlangs verscheen een artikel in de krant over een nieuwe telescoop die in gebruik werd genomen. Met deze telescoop kunnen de banen van planetoïden veel beter in kaart worden gebracht. De hoop is met deze nieuwe informatie de inslagkans tot 0 terug te brengen. Dit is precies in lijn met het mentale kansbegrip. De kans van 0.0014 representeert volgens deze interpretatie immers de mate van geloof die wetenschappers op basis van hun voorkennis hebben in de gebeurtenis (in dit geval de inslag van een planetoïde).
Als de voorkennis met betrekking tot deze gebeurtenis verandert, zal ook de kans die ze aan de gebeurtenis toeschrijven veranderen. Ze hopen dat deze kans met extra voorkennis terug te brengen is tot nul.[1]

Opgave 15.1

> Vat de tekst tot nu toe in je eigen woorden samen en bedenk daar ook drie nieuwe voorbeelden bij van éénmalige gebeurtenissen waarvan de uitkomst in principe bepaald is. Leg duidelijk uit waarom de kansen die je aan deze gebeurtenissen toekent mentaal zijn.

1. Hoewel onwaarschijnlijk, is het echter niet uitgesloten dat de werkelijke kans 1 is! In dat geval zou het met de mensheid gedaan kunnen zijn, zoals ook de dinosaurieërs vermoedelijk door een komeetinslag zijn uitgestorven.

Van mentale kansen naar getallen

Het bovenstaande verhaal is nogal kwalitatief, of zeg maar gerust zweverig. Wat geheel ontbreekt is namelijk een argument dat een kans als 'mate van geloof' vertaalt naar een kans als een getal tussen 0 en 1. In de praktijk wordt deze vertaling natuurlijk gemaakt: we identificeren een grote mate van geloof met een kans van bijna één en wanneer er geen enkel geloof in een bepaalde bewering aanwezig is associeren we dit met een kans gelijk aan nul. Maar wat nu als we 'enigzins', 'redelijk veel' of 'een beetje' in het optreden van een gebeurtenis geloven? Hoe kunnen we op een een getal toekennen aan deze intuïtieve uitspraken?
Bovendien moeten kansen aan bepaalde regels voldoen om er überhaupt op een wiskundige manier over te kunnen praten. Zo liggen kansen blijkbaar altijd tussen 0 en 1, en geldt zoals je weet dat de kans $P(\text{niet-}A)$ dat een gebeurtenis A niet plaatsvindt gelijk moet zijn aan $1 - P(A)$, waarbij $P(A)$ de kans is dat A wél plaatsvindt. Zo zijn er nog meer regels, die we in hoofdstuk 6 allemaal hebben opgeschreven. In het vervolg zul je deze zelf gaan afleiden uit het *Dutch Book Theorem*.

Een niet-wiskundige zou een 'mate van geloof' misschien helemaal niet in een getal uit willen drukken. Je zou bijvoorbeeld kunnen onderzoeken wat de emoties zijn van iemand die een bepaald geloof heeft, in de hoop dat een sterker geloof (bijvoorbeeld in de terugkeer van de Heiland) ook sterkere emoties met zich mee brengt. Maar daar kom je niet ver mee: juist iemand die iets heel sterk gelooft denkt daar al nauwelijks meer over na en toont dus ook weinig emoties. Maar precies hetzelfde geldt ook voor iemand die juist helemaal niet gelooft in de tweede komst van Jezus Christus op aarde. Bovendien zijn wij wiskundigen en zijn we nu eenmaal gewend kansen en vele andere zaken in getallen uit te drukken.

Mentale kansen en weddenschappen

Een belangrijke doorbraak in het probleem mate van geloof te vertalen naar wiskundige kansen werd tussen 1925 en 1930 bereikt in het werk van Frank Ramsey (1903-1930) en Bruno de Finetti (1906 - 1985).[2] Zij stelden voor om je 'mate van geloof' in een (éénmalige) gebeurtenis te vertalen in de bereidheid om een ***weddenschap*** aan te gaan over deze gebeurtenis. Deze bereidheid zal natuurlijk afhangen van de uitbetaling van de weddenschap, dat wil zeggen van je winst of verlies als de gebeurtenis waarover een weddenschap wordt afgesloten plaatsvindt. We zullen een theorie opstellen waarbij de uitbetaling van een weddenschap afhangt van een zogenaamde ***wed-ratio***. Het is de bedoeling dat deze wed-ratio een maat zal zijn voor het geloof van een persoon in een bepaalde gebeurtenis.

Wed-ratio's

We gaan het bovenstaande nu precies maken met behulp van een voorbeeld. Omdat de volgende twee rollen nog vaak voor zullen komen geven we ze een naam: Beauty en Nerd. Stel Beauty wil van Nerd weten in welke mate hij gelooft dat een bepaalde éénmalige gebeurtenis G zal plaatsvinden. Als voorbeeld zullen we voor G de gebeurtenis 'Nederland wint het EK 2008' nemen.
Omdat Beauty wil weten in welke mate Nerd gelooft dat Nederland het EK zal winnen, stelt ze hem voor hierover te wedden. Nerd mag daarbij de *wed-ratio* r bepalen en daarna zal Beauty een getal I kiezen dat zowel positief als negatief mag zijn. Dat het teken van I aan Nerd niet bekend is op het moment dat hij r mag kiezen zorgt ervoor dat Nerd r niet hoger of lager kan kiezen dan zijn werkelijke mate van geloof. We komen hier zo meteen op terug. De wed-ratio r bepaalt samen met het getal I het bedrag dat Nerd zal winnen of verliezen, zodra de uitslag van de weddenschap bekend is. In de onderstaande tabel zie je hoe deze bedragen afhangen van r en I. [3]

2. Deze doorbrak stond gek genoeg helemaal los van het ontstaan van de kwantummechanica in dezelfde periode; zie Hoofdstuk 2. Het werk van Ramsey en De Finetti was geïnspireerd door Thomas Bayes (1702-1761). Dit drietal dacht trouwens dat *alle* kansen mentaal waren; wij nemen slechts aan dat kansen op éénmalige gebeurtenissen in een deterministische situatie mentaal zijn.
3. Met de uitbetaling van de weddenschap bedoelen we hier en in de volgende hoofdstukken altijd de winst of het verlies van degene die de wed-ratio kiest. In ons voorbeeld is de uitbetaling dus de winst of het verlies van Nerd.

Gebeurtenis	*Uitbetaling*
Nederland wint het EK	$I(1-r)$
Nederland wint het EK niet	$-Ir$

Tabel 15.1: Uitbetaling van de weddenschap

Opgave 15.2

Vergelijk dit met de gang van zaken bij het wedden op de uitkomst van een paardenrace of voetbalwedstrijd. Wie van Nerd of Beauty speelt de rol van de *bookmaker* en wie van degene die wedt (de *punter*)? Hoe verhouden zich inzet en uitbetaling in deze tabel tot inzet en uitbetaling bij een wedbureau?

In het vervolg zullen we bewijzen dat een verstandige keuze van r altijd tussen 0 en 1 moet liggen. Met een verstandige keuze bedoelen we een keuze van r die voorkómt dat Nerd in een situatie verzeild raakt waarbij hij met zekerheid geld zal verliezen, onafhankelijk van de eindstand van het EK. Een dergelijke situatie wordt ook wel een ***Dutch Book*** genoemd; meer hierover in het volgende hoofdstuk.

Nemen we even aan dat Nerd daadwerkelijk zo verstandig is geweest r tussen 0 en 1 te kiezen, dan kunnen we het volgende opmerken: Als Beauty $I > 0$ kiest dan zal Nerd geld *winnen* als Nederland het EK wint en geld *verliezen* als Nederland niet het EK wint. Als Beauty $I < 0$ kiest dan zal Nerd juist geldt *verliezen* als Nederland het EK wint en geld *winnen* als Nederland het EK niet wint. Eigenlijk weet Nerd dus op het moment dat hij r kiest nog niet of hij juist vóór of tegen de Duitse overwinning gaat wedden. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat hij op het moment dat hij r kiest niet weet of I positief of negatief is. Deze onwetendheid over het teken van I zorgt ervoor dat hij r niet hoger of lager kan kiezen dan zijn werkelijke mate van geloof.
Stel je immers voor dat Nerd op het moment dat hij r mag kiezen al weet dat I een positief getal is. Het is dan, ongeacht de mate van geloof die hij heeft, voordelig voor hem om r zo klein mogelijk te kiezen. Kiest hij bijvoorbeeld $r = -100$ dan zal hij verzekerd zijn van winst ongeacht de uitslag van het EK. [4] Anderzijds, als hij weet dat I een negatief getal is dan is het in zijn voordeel r zo groot mogelijk te kiezen. Om dit te voorkomen moet Nerd de waarde r kiezen voordat Beauty het teken van I bepaalt.
Wiskundig kunnen we de bewering dat Nerd de wed-ration r gelijk moet kiezen aan de kans p die hij werkelijk toedicht aan een Nederlandse overwinning, als volgt kracht bij zetten.

Opgave 15.3

Toon aan dat de verwachte winst van Nerd uitgedrukt in p, r en I gelijk is aan:[5]

$$pI(1-r) + (1-p)(-Ir) = (p-r)I. \tag{15.1}$$

Zodra $p \neq r$ kan Beauty het teken van I zo kiezen zodat de weddenschap gemiddeld in het nadeel van Nerd zal uitvallen: als $p > r$ kiest ze $I < 0$ en als $p < r$ kiest ze $I > 0$.

De Dutch Book stelling

We hebben een numerieke waarde aan de mate van geloof toegekend en geprobeerd aannemelijk te maken dat deze waarde een indicatie vormt voor een bepaalde mate van geloof. Eerder merkten we op dat een verstandig persoon zijn wed-ratio r altijd zo zal kiezen dat deze tussen 0 en 1 ligt. Misschien vind je dit niet meteen vanzelfsprekend. We zagen immers al dat als het teken van I al bekend is, dit helemaal niet hoeft te gelden. De eis dat een kans altijd een waarde tussen 0 en 1 moet hebben is één van de axioma's van de kansrekening. In het volgende hoofdstuk bewijzen we dat de zojuist ingevoerde wed-ratio's r de axioma's van de kansrekening respecteren (de Dutch Book stelling).

4. Merk op: Omdat het het teken van I in dit geval bekend is voordat r wordt bepaald gaat het bewijs dat een verstandige keuze van r tussen 0 en 1 moet liggen niet meer op.
5. Neem hier alvast het volgende aan: als Nerd's mate van geloof in een Nederlandse overwinning gelijk is aan p, dan is Nerd's mate van geloof in een Nederlandse nederlaag gelijk aan $1-p$. Dit volgt uit de axioma's van de kansrekening. Je zult in het volgende hoofdstuk bewijzen dat onze manier om de mate van geloof te kwantificeren deze axioma's respecteert.

Dutch Books en coherentie

Om te bewijzen dat de wed-ratio's voldoen aan de axioma's van de kansrekening doen we een voor de hand liggende maar belangrijke aanname. We gaan er vanuit een persoon nooit tegen zijn eigen belang handelt. In ons geval betekent dat dat Nerd zijn wed-ratio nooit zo zal kiezen dat hij, ongeacht de uitkomst van de weddenschap, met zekerheid zal verliezen.
Een weddenschap hoeft zich niet per se te beperken tot één gebeurtenis G, maar kan ook over een aantal gebeurtenissen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gaan. Omdat Nerd in elke gebeurtenis natuurlijk een ander mate van geloof kan hebben mag bij hij bij elke gebeurtenis G_i een wed-ratio r_i kiezen. Beauty kiest bij elke G_i en r_i een getal I_i. We krijgen zo twee rijtjes getallen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ en $I_1, I_2, \ldots, I_n$, die samen de uitbetaling van de weddenschap bepalen zodra vastgesteld is welke van de gebeurtenissen G_i hebben plaatsgevonden en welke niet.

Definitie:
Een *Dutch Book* is een weddenschap op een serie gebeurtenissen waarbij Beauty de getallen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ zo kan kiezen dat Nerd, ongeacht de uitkomst, geld zal verliezen.

Definitie:
Als Beauty bij de door Nerd gekozen wedratio's $r_1, r_2, \ldots, r_n$ geen mogelijkheid heeft door een slimme keuze van $I_1, I_2, \ldots, I_n$ een Dutch book af te dwingen, dan worden de wed-ratio's $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *coherent* genoemd.

We kunnen de aanname dat niemand een weddenschap zal aangaan waarbij hij zeker is van verlies nu als volgt herformuleren: iedereen zal ervoor zorgen dat zijn wed-ratio's coherent zijn.

Uniciteit van wed-ratio's

Willen we dat onze theorie over weddenschappen een goede interpretatie is van de kansrekening, dan zullen we moeten bewijzen dat onze wedratio's aan de axioma's van de kansrekening voldoen. Maar voor het zover is, gaan we eerst bewijzen dat het niet mogelijk is twee verschillende wed-ratio's te kiezen voor één en dezelfde gebeurtenis. Onder de aanname van coherentie is dat gemakkelijk te bewijzen.[6]

Stelling:
Stel r_1 en r_2 zijn coherente wed-ratio's behorende bij gebeurtenissen G_1 en G_2. Er geldt: als $G_1 = G_2$ dan $r_1 = r_2$.

We bekijken de situatie waarin Beauty op zoek is naar Nerds mate van geloof in de gebeurtenissen G_1 en G_2. De stelling zegt nu dat Nerd dezelfde mate van geloof in G_1 en G_2 moet hebben als dit dezelfde gebeurtenissen zijn. Gevoelsmatig heel logisch natuurlijk, maar voor de volledigheid volgt hier het bewijs.

Bewijs:
Stel Nerd kiest $r_1 \neq r_2$. Dan mogen we er, zonder verlies van algemeenheid, van uit gaan dat $r_1 > r_2$. We laten zien dat Beauty in dit geval I_1 en I_2 zo kan kiezen zodat Nerd met zekerheid geld verliest.
Stel Beauty kiest $I_1 = 10$ en $I_2 = -10$. De uitbetaling aan Nerd is dan als volgt:

Gebeurtenis	*Uitbetaling*
G_1	$10(1 - r_1)$
$\neg G_1$	$-10r_1$
G_2	$-10(1 - r_2)$
$\neg G_2$	$10r_2$

Omdat $G_1 = G_2$ zijn er twee mogelijkheden:

1. G_1 en G_2 vinden beide plaats.
   De uitbetaling U is in dat geval gelijk aan $10(1 - r_1) - 10(1 - r_2) = 10(r_2 - r_1)$. Omdat $r_1 > r_2$ geldt $U < 0$.

6. Merk op dat de stelling niet zegt dat *iedereen* dezelfde wed-ratio's toe zal kennen aan een gebeurtenis G. De stelling zegt alleen dat *Nerd* niet twee verschíllende wed-ratio's toe kan kennen aan één en dezelfde gebeurtenis G.

2. G_1 en G_2 vinden beide niet plaats.
De uitbetaling U is in dat geval gelijk aan $-10r_1 + 10r_2 = 10(r_2 - r_1)$. Opnieuw geldt $U < 0$.

De mogelijkheid van Beauty I_1 en I_2 zo te kiezen dat Nerd met zekerheid verliest is in strijd met onze aanname dat Nerd coherente wed-ratio's zal kiezen. Blijkbaar moet dus gelden $r_1 = r_2$.
Einde bewijs

Uit deze stelling kunnen we concluderen dat het toekennen van wedratio's aan gebeurtenissen opgevat kan worden als een functie R op een verzameling gebeurtenissen. Deze functie kent aan elke van de gebeurtenissen in deze verzameling een getal toe, dat volgens de subjectieve theorie geïnterpreteerd kan worden als de kans op deze gebeurtenis. Willen we laten zien dat onze theorie over wed-ratio's de axioma's van de kansrekening zoals geformuleerd door Kolmogorov in 1933 respecteert, dan moeten we laten zien dat deze functie R een *kansfunctie* is. Een kansfunctie is gedefinieerd op een verzameling A van gebeurtenissen die aan bepaalde eigenschappen voldoet. Voor alle gebeurtenissen G_1, G_2 in A moet gelden dat ook de gebeurtenissen $G_1 \vee G_2, G_1 \wedge G_2, \neg G_1$ en $\neg G_2$ in A zitten. Verder moet A een gebeurtenis Ω bevatten die met zekerheid plaatsvindt.
Het is eenvoudig in te zien dat onze functie R gedefinieerd is op een dergelijke verzameling. Als de gebeurtenissen G_1 en G_2 voldoen aan onze aannamen[7], dan voldoen ook de volgende gebeurtenissen aan de aannamen: G_1 en G_2 vinden beide plaats , G_1 óf G_2 vindt plaats, G_1 vindt niet plaats, G_2 vindt niet plaats.
We zullen nu bewijzen dat onze functie R een kansfunctie is.

De Dutch Book stelling

Laten G, G_1, G_2 en Ω gebeurtenissen zijn waarin een bepaalde mate van geloof kan bestaan dat ze plaatsvinden. Verder geldt dat G_1 en G_2 elkaar uitsluiten, dat wil zeggen: ze kunnen niet beide plaatsvinden. Met $G_1 \vee G_2$ duiden we zoals gezegd aan dat de gebeurtenis G_1 of G_2 plaatsvindt. Ω is een gebeurtenis die met zekerheid zal plaatsvinden. De wedratio's behorende bij de gebeurtenissen $G, G_1, G_2, G_1 \vee G_2$ en Ω duiden we aan met $R(G), R(G_1), R(G_2), R(G_1 \vee G_2)$ en $R(\Omega)$.
Met behulp van deze notatie kunnen we de axioma's van de kansrekening als volgt uitdrukken: [8]

1. $0 \leq R(G) \leq 1$;
2. $R(\Omega) = 1$;
3. $R(G_1 \vee G_2) = R(G_1) + R(G_2)$;
4. $R(G_1|G_2) = \frac{R(G_1 \wedge G_2)}{R(G_2)}$ als $R(G_2) \neq 0$.

Hier staat $R(G_1|G_2)$ voor de voorwaardelijke kans op G_1 gegeven G_2. We concentreren ons eerst op de axioma's 1-3 en komen later terug op de betekenis van voorwaardelijke kansen.

Stelling:
Coherente wedratio's voldoen aan de eerste drie axioma's van de kansrekening.

Bewijs:
Het bewijs zit, net als het vorige, als volgt in elkaar: we gaan er vanuit dat Beauty geïnteresseerd is in Nerds geloof met betrekking tot een bepaalde gebeurtenissen. We tonen voor elk axioma aan dat als Nerd zijn wed-ratio's zo kiest dat ze *niet* aan dit axioma voldoen, Beauty een mogelijkheid heeft om een Dutch Book af te dwingen. Met andere woorden: als Nerds wed-ratio's een van de axioma's schenden en Beauty handelt optimaal, dan zal hij met zekerheid geldt verliezen. We voeren de variabele U in om de winst (of het verlies) van Nerd met betrekking tot de weddenschap aan te geven. Als $U < 0$ zal Nerd dus geld verliezen.

- $0 \leq R(G) \leq 1$.

  Stel $R(G) < 0$. Beauty hoeft alleen maar een $I < 0$ te kiezen om Nerd tot een Dutch Book te dwingen. Stel zij kiest $I = -10$. Er zijn twee mogelijkheden:
  1. G vindt plaats; dan geldt $U = -10(1 - R(G))$. Omdat $(1 - R(G)) > 0$, geldt $U < 0$.
  2. G vindt niet plaats; dan geldt $U = 10R(G)$. Omdat $R(G) < 0$, geldt eveneens $U < 0$.

7. Dat wil zeggen G_1 en G_2 zijn éénmalige bepaalde gebeurtenissen waarvan we kunnen vaststellen of ze wel of niet hebben plaatsgevonden.
8. Gegeven de eerste twee axioma's is het derde axioma equivalent met het principe van eindige additiviteit: $R(G_1) + R(G_2) + \ldots + R(G_n) = R(G_1 \vee \ldots \vee G_n)$ als $G_1, G_2, \ldots, G_n$ elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn.

Stel $R(G) > 1$. Nu hoeft Beauty slechts $I > 0$ te kiezen om Nerd tot een Dutch Book te dwingen. Stel zij kiest $I = 10$. Wederom zijn er twee mogelijkheden:
1. G vindt plaats; dan geldt $U = 10(1 - R(G))$. Omdat $(1 - R(G)) < 0$, geldt $U < 0$.
2. G vindt niet plaats; dan geldt $U = -10R(G)$. Omdat $R(G) > 1$ geldt $U < 0$.

Om aan de coherentie aanname te voldoen en daarmee de mogelijkheid tot een Dutch Book uit te sluiten moet dus gelden: $0 \leq R(G) \leq 1$.

- $R(\Omega) = 1$.
  Omdat we zeker weten dat Ω zal plaatsvinden, geldt $U = (1 - R(\Omega))I$.
  Stel $R(\Omega) < 1$. Dan is $(1 - R(\Omega)) > 0$. Beauty hoeft slechts $I < 0$ te kiezen. Dan geldt $U < 0$ en dwingt ze een Dutch Book af.

  Stel $R(\Omega) > 1$. Dan is $(1 - R(\Omega)) < 0$. Nu hoeft Beauty slechts $I > 0$ te kiezen om er voor te zorgen dat $U < 0$ en zodoende Nerd tot een Dutch Book te dwingen.
  De coherentie aanname zorgt er dus voor dat $R(\Omega) = 1$.

- $R(G_1 \vee G_2) = R(G_1) + R(G_2)$.

Opgave 15.4

Bewijs deze eigenschap zelf.

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat coherente wed-ratio's aan de eerste drie axioma's van de kansrekening voldoen.
Einde bewijs

Voorwaardelijke kansen

Het laatste axioma is van iets andere vorm dan de eerste drie; het zegt iets over *voorwaardelijke* kansen. We breiden onze theorie over wed-ratio's enigzins uit om ook voorwaardelijke kansen te kunnen interpreteren.

Definitie:
Een *voorwaardelijke* weddenschap op G_1 gegeven G_2 is een weddenschap op G_1 die alleen doorgang zal vinden als G_2 plaatsvindt. Vindt G_2 niet plaats, dan wordt de weddenschap afgeblazen.

De wed-ratio die een persoon (in ons geval Nerd) zal kiezen wanneer hij een voorwaardelijke weddenschap op G_1 gegeven G_2 aangaat geven we aan met $R(G_1|G_2)$. Deze wed-ratio respresenteert Nerds mate van geloof in de gebeutenis G_1 wanneer hij op de hoogte is van het feit dat G_2 zal plaatsvinden. We kunnen de uitkomst van een voorwaardelijke weddenschap op G_1 gegeven G_2 met wed-ratio $r = R(G_1|G_2)$ als volgt in een tabel weergeven:

Gebeurtenis	*Uitbetaling*
$G_1 \wedge G_2$	$I(1-r)$
$(\neg G_1) \wedge G_2$	$-Ir$
$\neg G_2$	0

Om te laten zien dat Nerd zijn wedratio gelijk moet kiezen aan $\frac{R(G_1 \vee G_2)}{R(G_2)}$ moeten we onze aanname van coherentie een beetje versterken. Er bestaan namelijk geen voorwaardelijke weddenschappen waarbij Nerd met zekerheid geld zal verliezen. Immers als G_2 niet plaatsvindt zal de hele weddenschap worden afgeblazen en zal Nerd dus ook geen geld verliezen.

Definitie:
We noemen Nerds wedratio's *strikt coherent* als Beauty haar getallen I niet zo kan kiezen dat alleen zij kans heeft op een positieve uitkomst.

Omdat we hebben aangenomen dat Nerd altijd in zijn eigen belang handelt is het redelijk te veronderstellen dat hij zijn wed-ratio's strikt coherent zal kiezen. Hij heeft er immers geen belang bij een weddenschap af te sluiten waarbij hij geen enkele kans maakt op een positieve uitkomst.

Stelling:
Strikt coherente wed-ratio's voldoen aan axioma 4.

Bewijs:
Wederom voeren we een vereenvoudigde notatie in:
$r_1 := R(G_1 \wedge G_2)$;
$r_2 := R(G_2)$;
$r_3 := R(G_1|G_2)$.
Dat wil zeggen r_1 en r_2 zijn de wed-ratio's die Nerd kiest voor respectievelijk de gebeurtenissen $G_1 \wedge G_2$ en G_2. Voor de voorwaardelijke weddenschap op G_1 gegeven G_2 kiest hij wed-ratio r_3. We kunnen het vierde axioma met deze notatie als volgt uitdrukken: $r_3 = \frac{r_1}{r_2}$.

Stel $r_3 < \frac{r_1}{r_2}$.
Beauty denkt wederom goed na, voert een aantal berekeningen uit, en besluit de volgende drie weddenschappen met Nerd af te sluiten:

1. Ze sluit een weddenschap af over de gebeurtenis $G_1 \wedge G_2$ waarbij ze $I = 10$ kiest.
2. Ze sluit een weddenschap af over de gebeurtenis G_2 waarbij ze $I = -\frac{10r_1}{r_2}$ kiest.[9]
3. Ze sluit een voorwaardelijke weddenschap af over de gebeurtenis G_1 gegeven G_2 waarbij ze $I = -10$ kiest.

We geven de uitbetaling van de drie afzonderlijke weddenschappen en de totale uitbetaling weer in een tabel.

Gebeurtenis	*Uitbetaling 1*	*Uitbetaling 2*	*Uitbetaling 3*	*Totaal*
$G_1 \wedge G_2$	$10(1 - r_1)$	$-\frac{10r_1}{r_2}(1 - r_2) = -10(\frac{r_1}{r_2} - r_1)$	$-10(1 - r_3)$	$10(r_3 - \frac{r_1}{r_2})$
$\neg G_1 \wedge G_2$	$-10r_1$	$-\frac{10r_1}{r_2}(1 - r_2) = -10(\frac{r_1}{r_2} - r_1)$	$10r_3$	$10(r_3 - \frac{r_1}{r_2})$
$G_1 \wedge \neg G_2$	$-10r_1$	$r_2\frac{10r_1}{r_2} = 10r_1$	0	0
$\neg G_1 \wedge \neg G_2$	$-10r_1$	$r_2\frac{10r_1}{r_2} = 10r_1$	0	0

Omdat $r_3 < \frac{r_1}{r_2}$ geldt in alle gevallen $U \leq 0$. Nerd heeft zijn wedratio's dus niet strikt coherent gekozen.
In het geval dat $r_3 > \frac{r_1}{r_2}$ geldt een zelfde soort argument. Beauty sluit dezelfde weddenschappen af maar nu met tegengestelde tekens van de getallen I. Ook dan zal blijken dat in alle gevallen $U \leq 0$, ofwel Nerds wedratio's zijn niet strikt coherent.

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat strikt coherente wedratio's voldoen aan het vierde axioma van de kansrekening.
Einde bewijs

9. Herinner je dat Beauty I pas hoeft te kiezen nadat Nerd zijn wed-ratio's gekozen heeft. Ze kan dus I op deze manier laten afhangen van Nerds wed-ratio's.

16

Keuzeonderwerp 2: Algemene afleiding van de Bell-ongelijkheden

In dit keuzeonderwerp leid je de Bell-ongelijkheden af in het geval dat het toeval in een kansexperiment door onwetendheid wordt veroorzaakt, ook in de situatie waarin niet alle vragen naast elkaar gesteld kunnen worden. Een belangrijk onderdeel van deze afleiding is het geven van de juiste definitie van "toeval door onwetendheid". We waren daar al in hoofdstuk 14 mee begonnen, en nu vullen we de wiskundige details in. Vervolgens geef je zelf de afleiding van de Bell-ongelijkheden voor drie en vier vragen.

De definitie van toeval door onwetendheid

Een logisch probleem

Wat heeft het feit dat je in de kwantumwereld niet zomaar alle vragen tegelijk kunt stellen voor gevolgen voor ons argument voor zuiver toeval?
Het logische argument dat we tot nu toe hebben gebruikt om tot zuiver toeval te komen is al in hoofdstuk 3 uitgelegd. We herhalen de uitspraak (3.1) nog eens:

> Als toeval komt door onwetendheid, dan voldoen de correlaties aan de Bell-ongelijkheden. (16.1)

En daaruit volgde de omkering (3.2):

> Als de correlaties van een toevalsproces niet voldoen aan de Bell-ongelijkheden, dan wordt het toeval niet veroorzaakt door onwetendheid. (16.2)

Als we de stilzwijgende aanname dat de vragen gelijktijdig gesteld kunnen worden hardop uitspreken, komt er echter te staan:

> Als toeval in een kansexperiment met N vragen komt door onwetendheid ***én*** de N vragen kunnen naast elkaar gesteld worden, dan voldoen de correlaties aan de Bell-ongelijkheid voor N vragen. (16.3)

In feite is dít de uitspraak die we in hoofdstuk 7 voor $N = 3$ en $N = 4$ (half) hebben bewezen.

De omkering van de uitspraak (16.3) is niet hetzelfde als de uitspraak (16.2), maar is als volgt:

> Als de correlaties in een kansexperiment met N vragen *niet* voldoen aan de desbetreffende Bell-ongelijkheid, dan wordt het toeval niet veroorzaakt door onwetendheid ***óf*** de N vragen kunnen niet gelijktijdig gesteld worden. (16.4)

Hierbij wordt het woord "of"zo gebruikt, dat "X of Y" betekent dat minstens één van de twee, X of Y geldt; ze kunnen dus ook allebei waar zijn.

Als we uitsluitend de implicatie (16.4) in handen hebben, is het logisch gesproken dus niet juist om uit de schending van een Bell-ongelijkheid te concluderen dat het toeval door onwetendheid komt (en dus zuiver is). De mogelijkheid bestaat immers dat de schending wordt veroorzaakt door het feit dat de drie (of vier) vragen A, B en C (en eventueel D) niet naast elkaar gesteld konden worden.
Toch is de conclusie dat zuiver toeval bestaat juist, maar om dat te bewijzen moeten we nog even hard aan het werk. Denk niet dat de eerdere afleiding van de Bell-ongelijkheden tevergeefs was: die is onderdeel van de nieuwe afleiding.

Om de Bell-ongelijkheden af te leiden in de veel algemenere situatie dat niet alle vragen gesteld kunnen worden, moet de aanname dat het toeval in een kansexperiment $\mathcal{K}$ door onwetendheid wordt veroorzaakt op een heel precieze manier worden geformuleerd. We zijn daar in hoofdstuk 14 al mee begonnen; lees dat hoofdstuk nog even goed door voor je met dit keuzeonderwerp begint!
Ook moet je je geheugen opfrissen over het volgende begrip, dat in het vervolg een grote rol zal spelen.

Voorwaardelijke kansen

We brengen het begrip ***voorwaardelijke kans*** in herinnering:

Definitie 16.1 *Als z een gebeurtenis is met kans $P(z) \neq 0$ en x een willekeurige andere gebeurtenis, dan is de **voorwaardelijke kans** op x gegeven z gelijk aan*

$$P(x|z) = \frac{P(x \text{ en } z)}{P(z)}. \tag{16.5}$$

Je kunt formule (16.5) ook omdraaien tot

$$P(x \text{ en } z) = P(x|z)P(z). \tag{16.6}$$

Je hoeft bij (16.6) niet meer aan te nemen dat $P(z) \neq 0$: als $P(z) = 0$ dan staan er gewoon $0 = 0$.
Het is duidelijk dat $0 \leq P(x \text{ en } z) \leq P(z) \leq 1$, want als x én z plaatsvinden, vindt zeker ook x plaats. Daarmee volgt de belangrijke eigenschap

$$0 \leq P(x|z) \leq 1. \tag{16.7}$$

Opgave 16.1

a) Ga na dat de regel (16.5) klopt bij het dobbelen: leid af dat de kans op twee ogen gegeven het feit dat het aantal gegooide ogen even is, gelijk is aan 1/3. Bedenk zelf nog een paar voorbeelden.

b) "Je staat in de finale van een spelshow. Je wordt meegenomen naar een wand met drie gesloten deuren. Achter één van de deuren staat een prachtige auto, achter de andere twee deuren staat niets. De quizmaster vraagt je voor een van de deuren te gaan staan. Om de spanning op te voeren, opent de quizmaster, die weet achter welke deur de auto staat, een van de twee overgebleven deuren waarachter niets staat. Vervolgens geeft de quizmaster jou de mogelijkheid om over te lopen naar de andere dichte deur. Wat doe je: verander je van keus of blijf je staan?"
Geef met behulp van voorwaardelijke kansen de juiste oplossing van dit probleem.
Kijk ter oriëntatie eventueel op de website `www.kennislink.nl/web/show?id=159743`, waarvan ook bovenstaand citaat afkomstig is.

Na dit intermezzo over voorwaardelijke kansen keren we terug naar ons eigenlijke onderwerp.

Definitie van toeval door onwetendheid

Voor het gemak herhalen we de aanname in hoofdstuk 14 die het uitgangspunt vormde van de discussie. Het uitgangspunt is een kansexperiment $\mathcal{K}$ waarin mogelijk niet alle vragen naast elkaar gesteld kunnen worden.

> **Aanname:** *Er is een 'onzichtbaar' deterministisch proces $\mathcal{T}$ dat de uitkomst van het gegeven kansexperiment $\mathcal{K}$ bepaalt. Zowel de uitkomsten van dit onzichtbare proces als de invloed ervan op het kansexperiment zijn ons onbekend.*

We gaan deze aanname nu precies maken. Het resultaat is Definitie 16.2.

Eerst stellen we dat de vragen van het 'onzichtbare' proces $\mathcal{T}$ wél allemaal naast elkaar gesteld kunnen worden. De rechtvaardiging hiervoor is dat we willen uitdrukken dat de uitkomsten van $\mathcal{K}$ in principe uiteindelijk bepaald zijn. Dat waardoor ze bepaald zijn is het veronderstelde proces $\mathcal{T}$. Als ook daar een fundamentele onzekerheid of onbepaaldheid zou optreden (wat zich dan zou kunnen uiten in het niet naast elkaar kunnen vaststellen van de waarden van alle variabelen van $\mathcal{T}$), dan zou $\mathcal{T}$ niet deterministisch zijn, en zouden we simpelweg *niet* hebben uitgedrukt dat de uitkomsten van $\mathcal{K}$ in principe bepaald zijn.

Indien we aannemen dat $\mathcal{T}$ deterministisch is, zeggen we dat de uitkomsten van $\mathcal{T}$ in principe bepaald zijn. Maar omdat deze uitkomsten niet van tevoren aan ons bekend zijn, mogen we zeggen dat het toeval in $\mathcal{T}$ door onwetendheid wordt veroorzaakt. We kunnen dan Stelling 6.1 (het *Dutch Book Theorem*) op dit toevalsproces loslaten. Deze stelling leidt tot de conclusie dat $\mathcal{T}$ wordt beschreven door een uitkomstruimte $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ met kansverdeling $\{P(U_1), P(U_2), \ldots, P(U_n)\}$. We gaan er verder van uit dat $P(U_i) > 0$ voor alle uitkomsten U_i; als $P(U_i) = 0$ laten we U_i gewoon weg uit alle berekeningen.

We gaan nu over naar de beschrijving van het kansexperiment $\mathcal{K}$. Een gebeurtenis G van $\mathcal{K}$ bestaat uit combinaties van antwoorden op vragen die naast elkaar gesteld kunnen worden. We geven nu niet de meest algemene beschrijving, maar beperken ons tot het soort situatie in onze voorbeelden.
Daarin is het kansexperiment $\mathcal{K}$ geformuleerd in termen van een aantal ja/nee vragen $X = A, B, C, \ldots$, waarvan slechts bepaalde paren (X, Y) van vragen gelijktijdig gesteld kunnen worden. In het experiment met twee fotonen waren de vragen tot nu toe van de vorm X_L en Y_R, waarbij X en Y staan voor A, B, of C. De paren (X, Y) zijn dus van de vorm (A_L, A_R), (A_L, B_R), $\ldots$, (C_L, C_R). Maar je kunt ook aan de linkerkant vragen A en B stellen en aan de rechterkant vragen C en D; dit is belangrijk voor de Bell-ongelijkheden met vier vragen. De gebeurtenissen G die van belang zijn voor de Bell-ongelijkheden zijn in ieder geval van de vorm $X \neq Y$.

Nu kunnen we eindelijk de algemene definitie van "toeval door onwetendheid"geven.

Definitie 16.2 *We zeggen dat het toeval in een kansexperiment $\mathcal{K}$ wordt veroorzaakt door onwetendheid als er een (onzichtbaar) toevalsproces $\mathcal{T}$ bestaat, zodat:*

1. *Het toeval in $\mathcal{T}$ wordt veroorzaakt door onwetendheid;*
2. *Voor iedere gebeurtenis G van het kansexperiment $\mathcal{K}$ geldt*

$$P(G) = P(G|U_1)P(U_1) + P(G|U_2)P(U_2) + \cdots + P(G|U_n)P(U_n), \tag{16.8}$$

   voor bepaalde voorwaardelijke kansen $P(G|U_i)$;
3. *Voor ieder paar vragen X en Y van $\mathcal{K}$ die naast elkaar gesteld kunnen worden (met antwoorden $x = +$ of $x = -$ en $y = +$ of $y = -$) en iedere uitkomst U_i van het toevalsproces $\mathcal{T}$ geldt*

$$P(X = x \, en \, Y = y \mid U_i) = P(X = x|U_i)P(Y = y|U_i). \tag{16.9}$$

Eigenschap (16.8) lijkt een open deur (al staat daar geen prachtige auto achter te wachten), want volgens (16.6) staat er niets anders dan

$$P(G) = P(G \, en \, U_1) + P(G \, en \, U_2) + \cdots + P(G \, en \, U_n). \tag{16.10}$$

Maar hoe rechtvaardig je eigenlijk Definitie 16.1 van voorwaardelijke kansen? Het blijkt dat deze rechtvaardiging wordt gegeven door een uitbreiding van het *Dutch Book Theorem*. Als namelijk de invloed van $\mathcal{T}$ op $\mathcal{K}$ in principe bepaald is maar aan ons onbekend, dan worden de voorwaardelijke kansen waarmee we onze onwetendheid over deze invloed modelleren noodzakelijk gegeven door vergelijking (16.5). Je kunt hier als onderdeel van het eerste keuzeonderwerp nader op in gaan. Uit deze uitbreiding volgt tevens de te verwachten relatie:

Als $G_1, \ldots, G_k$ gebeurtenissen uit het kansexperiment $\mathcal{K}$ zijn die elkaar uitsluiten en waarvoor geldt dat $P(G_1) + \cdots + P(G_k) = 1$, dan geldt voor iedere uitkomst U_i van $\mathcal{K}$ dat

$$P(G_1|U_i) + \cdots + P(G_k|U_i) = 1. \tag{16.11}$$

Dit lijkt erg op de eigenschap (16.10), want volgens (16.6) is (16.11) hetzelfde als

$$P(U_i) = P(G_1\,en\,U_i) + \cdots + P(G_k\,en\,U_i). \tag{16.12}$$

Wat drukt eigenschap (16.9) uit? Dit blijkt uit de volgende opgave. Onderdeel a) is noodzakelijk voor b), omdat de voorwaardelijke kansen $P(X = x|Y = y\,en\,U_i)$ niet direct in Definitie 16.2 voorkomen.

Opgave 16.2

a) Druk de voorwaardelijke kans $P(X = x|Y = y\,en\,U_i)$ uit in voorwaardelijke kansen van de vorm $P(G|U_i)$, waarbij G een gebeurtenis van $\mathcal{K}$ is.

b) We definiëren de voorwaardelijke kansen

$$\begin{aligned} P(X = x|Y\,en\,U_i) &:= P(X = x|Y = +\,en\,U_i) + P(X = x|Y = -\,en\,U_i); &(16.13)\\ P(Y = y|X\,en\,U_i) &:= P(Y = y|X = +\,en\,U_i) + P(Y = y|X = -\,en\,U_i). &(16.14)\end{aligned}$$

Laat zien dat de ene voorwaarde (16.9) equivalent is met het volgende stelsel voorwaarden:

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y\,en\,U_i) &= P(X = x|Y\,en\,U_i); &(16.15)\\ P(Y = y|X = x\,en\,U_i) &= P(Y = y|X\,en\,U_i); &(16.16)\\ P(X = x|Y\,en\,U_i) &= P(X = x|U_i); &(16.17)\\ P(Y = y|X\,en\,U_i) &= P(Y = y|U_i). &(16.18)\end{aligned}$$

In onderdeel b) kun je $P(X = x|Y\,en\,U_i)$ interpreteren als de voorwaardelijke kans op het resultaat $X = x$, gegeven de uitkomst U_i van het onzichtbare toevalsproces $\mathcal{T}$ *en het feit dat de vraag Y gesteld wordt*. Analoog voor $P(Y = y|X\,en\,U_i)$. Je toont dan aan dat voorwaarde (16.9) opgesplitst kan worden in twee soorten condities. Conditie (16.15) zegt dat, in aanwezigheid van $\mathcal{T}$, het antwoord op de vraag X niet afhangt van het antwoord op Y (en analoog voor conditie (16.16)). Conditie (16.17) zegt vervolgens dat het antwoord op X ook niet afhangt van het al dan niet stellen van vraag Y (en analoog voor conditie (16.18)).
Kortom, het antwoord op X wordt volledig bepaald door het toevalsproces $\mathcal{T}$ en niet door Y.

Lokaliteit

In de voorbeelden die we hebben gezien worden de vragen X en Y ver van elkaar gesteld. De eis dat het antwoord van X niet van het stellen of beantwoorden van Y mag afhangen, maar uitsluitend van het onzichtbare toevalsproces $\mathcal{T}$ (en andersom), wordt daarom door fysici vaak als een ***lokaliteitsconditie*** opgevat. Hier zit achter dat de vragen X en Y gelijktijdig gesteld kunnen worden. Omdat de lichtsnelheid eindig is, kan Y dan geen invloed uitoefenen op X. Het opgeven van de lokaliteitsconditie is daarom de enige uitweg voor degenen die het bestaan van zuiver toeval ontkennen.[1]

Als alle vragen in een kansexperiment $\mathcal{K}$ naast elkaar gesteld kunnen worden, is in zekere zin automatisch aan de lokaliteitsconditie voldaan. In dat geval kun je namelijk aan Definitie 16.2 voldoen door $\mathcal{T} = \mathcal{K}$ te kiezen en te postuleren dat het toeval in $\mathcal{T}$ door onwetendheid wordt veroorzaakt.

Opgave 16.3

Stel bijvoorbeeld dat $\mathcal{K}$ uit drie ja/nee vragen bestaat.

a) Kies $\mathcal{T} = \mathcal{K}$ en definieer de voorwaardelijke kansen $P(G|U_i)$ zodanig dat de kansverdeling op de uitkomstruimte van $\mathcal{T}$ gelijk is aan die op de uitkomstruimte van $\mathcal{K}$.

b) Ga na dat met deze keuze aan (16.9) is voldaan.

---

1. Vrijwel alle natuurkundigen zijn overtuigd van de lokaliteitsconditie, maar een kleine groep fysici en filosofen is het daar niet mee eens. Volgens hen is de wereld een deterministische machine en daarom zoeken ze naar argumenten om de redenering in dit boekje onderuit te halen. Het enige geldige argument is het toelaten van signalen die zich sneller voortplanten dan het licht. Oorspronkelijk werd deze groep aangevoerd door David Bohm (1917-1992), een zweverig type dat bevriend was met de bekende guru Krishnamurti. Momenteel is de Nederlandse Nobelprijwinnaar Gerard 't Hooft (1946) er de meest prominente vertegenwoordiger van.

Bewijs van de Bell-ongelijkheden

Na deze toelichting op Definitie 16.2, gaan we nu uit deze definitie de Bell-ongelijkheden afleiden. We doen dit in drie gevallen, die al zijn genoemd in hoofdstuk 14.

Stelling 16.1 *Stel dat een kansexperiment $\mathcal{K}$ bestaat uit drie ja/nee vragen A, B en C, waarin twee willekeurige vragen tegelijk gesteld kunnen worden. Als het toeval in $\mathcal{K}$ wordt veroorzaakt door onwetendheid in de zin van Definitie 16.2, dan geldt de Bell-ongelijkheid*

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C). \tag{16.19}$$

Het bewijs is een kwestie van uitschrijven. Per definitie van de kans $P(A \neq B)$ geldt

$$P(A \neq B) = P(A = + \, en \, B = -) + P(A = - \, en \, B = +).$$

Volgens (16.8) is de eerste term uit te drukken als

$$P(A = + \, en \, B = -) = P(A = + \, en \, B = -|U_1)P(U_1) + \cdots P(A = + \, en \, B = -|U_n)P(U_n).$$

Daarin kunnen we volgens (16.9) invullen:

$$P(A = + \, en \, B = -|U_i) = P(A = +|U_i)P(B = -|U_i).$$

We gebruiken nu (16.11) met $G_1 = (B = +)$ en $G_2 = (B = -)$. Het is duidelijk dat (16.11) van toepassing is, want

$$P(B = +) + P(B = -) = 1;$$

het antwoord op B is namelijk ja of nee. Dit geeft

$$P(B = -|U_i) = 1 - P(B = +|U_i).$$

Op deze manier schrijven we alle drie de termen $P(A \neq B)$, $P(B \neq C)$ en $P(A \neq C)$ om tot er uitsluitend voorwaardelijke kansen in voorkomen van de vorm $P(A = +|U_i)$, $P(B = +|U_i)$ en $P(C = +|U_i)$. Er komt dan:

$$P(A \neq B) + P(B \neq C) - P(A \neq C) = 2(k_1 P(U_1) + \cdots k_n P(U_n)), \tag{16.20}$$

met

$$k_i := P(A = +|U_i)(1 - P(B = +|U_i))P(C = +|U_i) + (1 - P(A = +|U_i))P(B = +|U_i)(1 - P(C = +|U_i)).$$

Nu volgt uit (16.7) en $0 \leq P(U_i) \leq 1$ (zie hoofdstuk 6) dat elk van de zes termen in het rechterlid van (16.20) positief is, zodat

$$P(A \neq B) + P(B \neq C) - P(A \neq C) \geq 0.$$

Hiermee is de Bell-ongelijkheid (16.19) bewezen.

Opgave 16.4

a) Schrijf het bovenstaande bewijs in detail uit.
b) Bewijs op dezelfde manier de volgende stelling.

Stelling 16.2 *Stel dat een kansexperiment $\mathcal{K}$ bestaat uit vier ja/nee vragen A, B en C, waarin de volgende paren van vragen tegelijk gesteld kunnen worden: (A, C), (A, D), (B, C) en (B, D). Als het toeval in $\mathcal{K}$ wordt veroorzaakt door onwetendheid in de zin van Definitie 16.2, dan geldt de Bell-ongelijkheid*

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq D) + P(B \neq C) + P(B \neq D). \tag{16.21}$$

Van zes vragen naar drie vragen

Ten slotte geldt voor een kansexperiment met zes vragen van het soort dat we in de hoofdstukken 10 en 11 ziojn tegengekomen het volgende.

Stelling 16.3 *Stel dat een kansexperiment $\mathcal{K}$ bestaat uit zes ja/nee vragen $A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R$, waarin alle paren van vragen van de vorm (X_L, Y_R) tegelijk gesteld kunnen worden (met $X = A$, $X = B$ of $X = C$ en $Y = A$, $Y = B$ of $Y = C$). Stel tevens dat de EPR-correlaties* (10.11) *en* (10.12) *gelden, oftewel*

$$P(A_L = A_R) = 1; \tag{16.22}$$
$$P(A_L \neq A_R) = 0. \tag{16.23}$$

Als het toeval in $\mathcal{K}$ wordt veroorzaakt door onwetendheid in de zin van Definitie 16.2, dan geldt de Bell-ongelijkheid

$$P(A_L \neq C_R) \leq P(A_L \neq B_R) + P(B_L \neq C_R). \tag{16.24}$$

Het belangrijkste deel van het bewijs is de volgende opgave.

Opgave 16.5

Laat uit de aannamen van Stelling 16.3 zien dat dan voor iedere uitkomst U_i van $\mathcal{T}$ en $X = A, B, C$ één van de volgende twee mogelijkheden geldt:
Mogelijkheid 1:

$$P(X_L = +|U_i) = 1 \text{ en } P(X_R = +|U_i) = 1; \tag{16.25}$$
$$P(X_L = -|U_i) = 0 \text{ en } P(X_R = -|U_i) = 0. \tag{16.26}$$

Mogelijkheid 2:

$$P(X_L = +|U_i) = 0 \text{ en } P(X_R = +|U_i) = 0; \tag{16.27}$$
$$P(X_L = -|U_i) = 1 \text{ en } P(X_R = -|U_i) = 1. \tag{16.28}$$

Je kunt deze opgave als volgt aanpakken. De correlatie (16.23) betekent

$$P(A_L = + \, en \, A_R = -) + P(A_L = - \, en \, A_R = +) = 0. \tag{16.29}$$

Beide termen moeten dus nul zijn (waarom?). Neem de eerste. Combineer $P(A_L = + \, en \, A_R = -) = 0$ met (16.8) en (16.9). Je vindt dan:

$$P(A_L = +|U_1)P(A_R = -|U_1)P(U_1) + \cdots + P(A_L = +|U_n)P(A_R = -|U_n)P(U_n) = 0. \tag{16.30}$$

We hebben aangenomen dat $P(U_i) > 0$ voor alle uitkomsten U_i en bovendien geldt de ongelijkheid (16.7). Het moet dus wel zo zijn dat

$$P(A_L = +|U_i)P(A_R = -|U_i) = 0 \tag{16.31}$$

voor alle uitkomsten U_i. Het volgt dat ofwel $P(A_L = +|U_i) = 0$, ofwel $P(A_R = -|U_i) = 0$, of allebei. Dat laatste is echter onmogelijk. Om dat in te zien gebruiken we de eigenschap

$$P(A_L = A_R) + P(A_L \neq A_R) = 1. \tag{16.32}$$

Volgens (16.11) volgt hieruit voor iedere U_i dat

$$P(A_L \neq A_R|U_i) = 1 - P(A_L = A_R|U_i). \tag{16.33}$$

Op soortgelijke wijze als (16.30) vind je dan uit (16.23) dat

$$(1 - P(A_L = A_R|U_1))P(U_1) + \cdots + (1 - P(A_L = A_R|U_n))P(U_n) = 0. \tag{16.34}$$

Hieruit volgt dat

$$P(A_L = A_R|U_i) := P(A_L = + \, en \, A_R = +|U_i) + P(A_L = - \, en \, A_R = -|U_i) = 1 \tag{16.35}$$

voor alle uitkomsten U_i. Gebruik je nu (16.9), dan volgt

$$P(A_L = +|U_i)P(A_R = +|U_i) + P(A_L = -|U_i)P(A_R = -|U_i) = 1. \tag{16.36}$$

Daaruit zie je dat $P(A_L = +|U_i) = 0$ en $P(A_R = -|U_i) = 0$ niet beide waar kunnen zijn.
Stel dat $P(A_R = -|U_i) = 0$. Dan volgt uit (16.36) onmiddellijk dat (16.25) moet gelden (voor $X = A$). We zitten dan dus in Mogelijkheid 1. Als echter $P(A_L = +|U_i) = 0$, dan belanden we in Mogelijkheid 2.

Her argument voor B en C is uiteraard precies hetzelfde.
Deze opgave betekent dat een uitkomst U_i van het 'onzichtbare' toevalsproces $\mathcal{T}$ het antwoord op de vragen $A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R$ van het kansexperiment $\mathcal{K}$ vastlegt: zelfs als we erkennen dat we de invloed van $\mathcal{T}$ op $\mathcal{K}$ niet kennen, dwingen de EPR-correlaties (16.22) en (16.23) ons ertoe alle voorwaardelijke kansen gelijk aan 0 of 1 te kiezen.

Om de Bell-ongelijkheden (16.24) af te leiden is van het bovenstaande verhaal alleen maar nodig dat nu volgt:

$$P(X_L = +|U_i) = P(X_R = +|U_i) \tag{16.37}$$
$$P(X_L = -|U_i) = P(X_R = -|U_i), \tag{16.38}$$

voor $X = A, B, C$.

Opgave 16.6

Maak het bewijs van (16.24) nu af: ga in eerste instantie precies zo te werk als in de afleiding van (16.19) en vul op een slim gekozen punt (16.37) en (16.38) in. Daarna gaat het bewijs weer verder als bij (16.19).

Als je nu even teruggaat naar hoofdstuk 11, dan zie je dat (16.37) en (16.38) ook de laatste opgave van dat hoofdstuk op een nieuwe manier oplossen. In hoofdstuk 11 ging het om een bepaald soort 'plausibele' verklaring van EPR-correlaties. Definitie 16.2 is een grootscheepse generalisatie van het soort verklaringen dat we in hoofdstuk 11 hebben bedacht, zodat je nu op een heel algemene manier hebt gezien dat dergelijke verklaringen tot een Bell-ongelijkheid leiden.